Conteúdo

Exame de Matemática de 2013

Correcção do exame de Matemática de 2013

1. A intersecção do conjunto de todos os números naturais múltiplos de 10 com o conjunto de todos os números naturais múltiplos de 15 é o conjunto de todos os números naturais múltiplos de:

   A: 2 B: 3 C: 5 D: 30 E: 150

   Resolução:

   A intersecção destes conjuntos é o conjunto de múltiplos comuns de 10 e 15. Determinemos o menor múltiplo commum de 10 e 15. Temos

   $$10 = 2 \cdot 5,\ \ 15 = 3 \cdot 5 \Rightarrow mmc(10, 15) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

   Assim, os múltiplos de 30 também são múltiplos de 10 e de 15. A resposta certa é **D**.

   - Note que 2, 3 e 5 não são nem múltiplos de 10 e nem de 15. O número 150 é múltplo de 10 e de 15, contudo, o conjunto dos múltiplos de 150 não contém 30 que é também múltiplo de 10 e de 15.

2. Escolha um número racional que não é inteiro:

   A: $3,277$ B: -327 C: 0 D: $\sqrt{2}$ E: -3π

   Resolução : Temos:

   - O número $3,277 = \frac{3277}{1000}$ é racional, pois, é quociente de dois números inteiros e resulta num número não inteiro.
   - Os números -327 e 0 são racionais e inteiros.
   - Os números $\sqrt{2}$ e 3π são irracionais.

   A resposta certa é **A**.

3. O preço de um artigo, primeiro, aumenta 30%, e depois, diminui 30%. Em que percentagem se altera o preço inicial do artigo pelo resultado de duas operações?

   A: 4% B: 9% C: 16% D: 20% E: Não há alteração

   Resolução : Seja p o preço inicial do artigo, p_1 o preço do artigo depois da primeira alteração e p_2 o preço do artigo depois da segunda alteração. Temos:

   $$p_1 = p + 30\%p = p + 0,3 \cdot p = 1,3 \cdot p$$
   $$p_2 = p_1 - 30\%p_1 = p_1 - 0,3 \cdot p_1 = 0,7 \cdot p_1 = 0,7 \cdot 1,3p = 0,91 \cdot p$$
   $$= (1 - 0,09) \cdot p = p - 9\%p.$$

   Assim, em relação ao preço inicial, o artigo diminui 9%. A resposta certa é **B**.

4. Sejam m e n elementos do conjuntos $M = \{-3, -2, 4, 6\}$ e $N = \{2, 3\}$, respectimente. Considere a relação $R \subset M \times N$ dada pela lei $(m, n) \in R$ se $m > n$. Os pares ordenados (m, n) que constituem à relação R são:

   A. $(-3, 2), (-2, 3), (4, 2), (6, 3)$;
   B. $(-3, 2), (4, 3), (6, 2), (6, 3)$;
   C. $(4, 2), (4, 3), (4, 2), (6, 2), (6, 3)$;
   D. $(-3, 3), (-2, 2), (6, 2), (6, 3)$;
   E. $(-3, 2), (-2, 3), (4, 2), (6, 3)$.

   Resolução : Temos: $4 > 2$, $4 > 3$, $6 > 2$ e $6 > 3$. Assim,

$$m > n \Rightarrow (m, n) \in R,$$

   logo, $(4, 2), (4, 3), (6, 2), (6, 3)$ são elementos da relação R.

   - Note que $(-3, 2)$ e $(-2, 2)$ não pertencem a relação, pois, $-3 \not> 2$, $-2 \not> 2$.

   A resposta certa é **C**.

5. Simplificando a expressão $(a+b)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) : \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)$, obtém-se?

   A: $2ab$ B: $a - b$ C: ab D: $a + b$ E: $-ab$

   Resolução : Assumindo que $a^2 - b^2 \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned}(a+b)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) : \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) &= (a+b)\left(\frac{b-a}{ab}\right) : \left(\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}\right)\\ &= \left(\frac{b^2-a^2}{ab}\right) \cdot \left(\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\right) = -\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right) \cdot \frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\\ &= -\frac{a^2b^2}{ab} = -ab.\end{aligned}$$

   A resposta certa é **E**

   - As outras alternativas não estão certas, pois, por exemplo, para $a = 2$, $b = 1$ não obtemos -2.

6. A expressão $\frac{\sqrt{a\sqrt{a^3}}}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{a}}$ é equivalente a:

   A: $a^{\frac{1}{3}}$ B: $a^{\frac{1}{2}}$ C: $a^{\frac{1}{4}}$ D: $a^{-\frac{1}{4}}$ E: $a^{-\frac{1}{2}}$

   Resolução : Temos:

$$\frac{\sqrt{a\sqrt{a^3}}}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{a}} = \frac{\sqrt{a^2\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{a}} = \frac{a\sqrt{\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{a}} = \frac{a\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{a}} = \frac{a}{\sqrt[3]{a^2}} = a^{1-2/3} = a^{\frac{1}{3}}.$$

   A resposta certa é **A**.

7. A expressão $(\sqrt{5} - 3)^2(14 + 6\sqrt{5})$ é igual a:

   A: 8 B: 256 C: 9 D: 4 E: 16

   Resolução : Temos:

$$\begin{aligned}(\sqrt{5} - 3)^2(14 + 6\sqrt{5}) &= (5 - 6\sqrt{5} + 9)(14 + 6\sqrt{5})\\ &= (14 - 6\sqrt{5})(14 + 6\sqrt{5}) = 14^2 - 6^2\sqrt{5}^2 = 196 - 36 \cdot 5 = 16.\end{aligned}$$

   A resposta certa é **E**.

8. O número $\left[(7\sqrt{7})^{-\frac{1}{3}}+(3^{\frac{1}{10}})^{-5}\right]\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{7}}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ é igual a:

A: $\frac{2}{21}$ B: $-\frac{2}{21}$ C: $\frac{4}{21}$ D: $-\frac{10}{21}$ E: $-\frac{4}{21}$

Resolução : Temos:

$$\left[(7\sqrt{7})^{-\frac{1}{3}}+(3^{\frac{1}{10}})^{-5}\right]\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{7}}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=\left[(\sqrt{7^3})^{-\frac{1}{3}}+(3^{-\frac{5}{10}})\right]\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{7}}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$
$$\left[(7^{\frac{3}{2}})^{-\frac{1}{3}}+(3^{-\frac{1}{2}})\right]\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\left[7^{-\frac{1}{2}}+(3^{-\frac{1}{2}})\right]\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{7}-\frac{1}{3}=\frac{3-7}{21}=-\frac{4}{21}.$$

A resposta certa é **E**.

9. Sabe-se que a área de um quadrado e o seu perímetro são expressos pelo mesmo número. Então, a medida do lado deste quadrado é igual a:

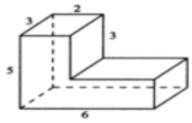
A: 1 B: 4 C: 2 D: $2,5$ E: 3

Resolução : Seja l o lado do quarado. Designando por A a área do qudrado e por P o perímetro do quadrado, teremos:

$$A_{quadrado}=P_{quadrado}\Rightarrow l^2=4l\Rightarrow l(l-4)=0\Rightarrow l=0\vee l=4.$$

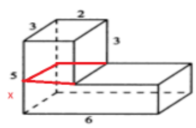
Desta forma, $l=4$. A resposta certa é **B**.

10. O volume do polígono desenhado na figura é:



A: 18 B: 40 C: 46 D: 48 E: 54

Resolução: Considerando a figura



temos:

$$\begin{aligned}\text{Volume Polígono} &= \text{Volume Paralelopípedo inferior} + \text{Volume Paralelopípedo superior}\\ &= 6\cdot 3\cdot 2+3\cdot 2\cdot 3=54.\end{aligned}$$

A resposta certa é **E**.

11. Se a relação dos volumes de duas bolas é 1: 27 , então a relação das superfícies destas bolas é:

A: $1:3$ B: $1:27$ C: $1:3\sqrt{3}$ D: $1:9$ E: 1:81

Resolução : Temos:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3}=\frac{r_1^3}{r_2^3}=\frac{1}{27},$$

onde r_1, r_2 correspondem aos raios das bolas (esferas), espectivamente. Desta forma, $r_2^3 = 27r_1^3$, ou seja, $r_2 = 3r_1$. A área da superfície esférica (bola) é $S = 4\pi R^2$, onde R é o raio. Assim,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{r_1^2}{9r_1^2} = \frac{1}{9}.$$

Assim, a relação entre as superfícies é 1:9. A resposta certa é **D**.

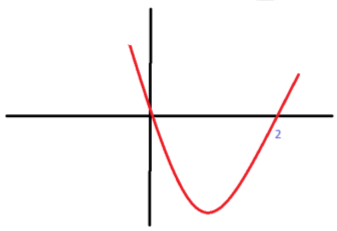
12. O conjunto das soluções da desigualdade $\frac{x^{49}(2-x)^{51}}{(x^2-3x+2)^{100}} \geq 0$?

A: $[0,1[\cup]1,2[\cup]2,\infty[$ B: $[0,2[$ C: $]-\infty,0] \cup [2,\infty[$ D: $[0,1[\cup]1,2[$ E: $\emptyset$

Resolução: O denominador deve ser diferente de zero e é sempre positivo. Assim, a fracção é não negativa se e somente se o numerador é não negativo. Visto que os expoentes dos factores dos polinômios do numerador são ímpares, este reduz-se a

$$x(2-x) \geq 0,\ x^2 - 3x + 2 \neq 0.$$
$$x(x-2) \leq 0,\ (x-1)(x-2) \neq 0.$$
$$x(x-2) \leq 0,\ x \neq 1 \wedge x \neq 2.$$

Resolvendo graficamente, teremos:



A solução é $x \in [0,2] \setminus \{1,2\} = [0,1[\cup]1,2[$. A resposta certa é **D**.

13. Numa turma, 12 alunos são meninas. A proporção de meninas e rapazes é $2:3$. O número de alunos na turma é:

A: 18 B: 30 C: 24 D: 28 E: 22

Resolução : Temos:

$$\frac{\text{número de meninas}}{\text{número de rapazes}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{número de meninas} = \frac{2}{3} \cdot \text{número de rapazes}.$$

Existem 12 meninas na turma. Logo,

$$\frac{3}{2} \cdot \text{número de meninas} = \text{número de rapazes}$$
$$\text{número de rapazes} = \frac{3}{2} \cdot \text{número de meninas} = \frac{3}{2} \cdot 12 = 18.$$

O número de alunos da turma é número de rapazes + número de meninas = 18+12 = 30. A resposta certa é **B**.

14. Sendo a função $y = \frac{2}{x\sqrt{2-x}}$, então o seu domínio é:

A: $\{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$
B: $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 2\}$

C: $\{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$
D: $\{x \in \mathbb{R} : x < 2 \;\wedge\; x \neq 0\}$
E: $\{x \in \mathbb{R} : x < 2 \wedge x > 0\}$

Resolução : Temos:

$$x\sqrt{2-x} \neq 0, 2-x \geq 0 \Rightarrow x \neq 0 \wedge \sqrt{2-x} \neq 0 \wedge 2-x > 0$$
$$x \neq 0 \wedge x \neq 2 \wedge x < 2 \Rightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]0, 2[$$

A resposta certa é **D**.

15. A inequação $\frac{x-1}{(2x+4)(3-x)} \geq 0$ tem solução :

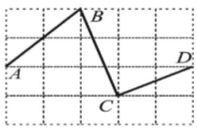
A: $\{x \in \mathbb{R} : x < -2 \vee 1 < x < 3\}$
B: $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -2 \vee 1 < x < 3\}$
C: $\{x \in \mathbb{R} : x < -2 \vee 1 < x \leq 3\}$
D: $\{x \in \mathbb{R} : x > 3 \;\vee\; -2 \leq x < 1\}$
E: $\{x \in \mathbb{R} : x < -2 \vee 1 \leq x < 3\}$

Resolução : Tendo em conta que o denominador não se anula, teremos:

x	$]-\infty, -2[$	$]-2, 1[$	1	$]1, 3[$	$]3, \infty[$
$2x+4$	-	+	6	+	+
$x-1$	-	-	0	+	+
$3-x$	+	+	2	+	-
$\frac{x-1}{(2x+4)(3-x)}$	+	-	0	+	-

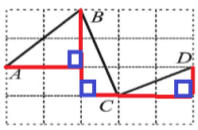
Assim, a solução é $\{x \in \mathbb{R} : \; x < -2 \vee 1 \leq x < 3\}$. A resposta certa é **E**.

16. Determine o comprimento da linha poligonal ABCD na figura sabendo que cada quadrado da rede mede de lado 1 cm.



A: $11cm$ B: $\sqrt{23}cm$ C: $8cm$ D: $4+\sqrt{3}cm$ E: $\sqrt{5}+\sqrt{10}+2\sqrt{2}cm$

Resolução : Tendo em conta a figura



e usando teorema de Pitâgoras, temos:

$$|AB|^2 = (2cm)^2 + (2cm)^2 \Rightarrow |AB| = 8cm^2 \Rightarrow |AB| = \sqrt{8cm^2} = 2\sqrt{2}cm.$$
$$|BC|^2 = (3cm)^2 + (1cm)^2 \Rightarrow |BC| = 10cm^2 \Rightarrow |BC| = \sqrt{10cm^2}\sqrt{10}cm.$$
$$|CD|^2 = (2cm)^2 + (1cm)^2 \Rightarrow |CD| = 5cm^2 \Rightarrow |CD| = \sqrt{5cm^2} = \sqrt{5}cm.$$

Assim, o comprimento da linha ABCD é $2\sqrt{2}+\sqrt{10}+\sqrt{5}$. A resposta certa é **E**.

17. A solução da equação $3^x - 7^x = 0$.

A: $\log_3^7$ B: $\log_7^3$ C: $\frac{3}{7}$ D: $\frac{7}{3}$ E: 0

Resolução : Temos: $3^x - 7^x = 0 \Leftrightarrow 3^x = 7^x \Leftrightarrow \frac{3^x}{7^x} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^x = \left(\frac{3}{7}\right)^0 \Rightarrow x = 0$. A resposta certa é **E**.

18. Se a e b números reais positivos. Se $\log_2^{(\log_5^a)} = \log_5^{(\log_2^b)} = 0$, então $a + b$ é:

A: 7 B: 2 C: 5 D: 10 E: 2^5

Resolução : Temos:

$$\log_2^{(\log_5^a)} = \log_5^{(\log_2^b)} = 0 \Rightarrow \log_2^{(\log_5^a)} = \log_5^{(\log_2^b)} = \log_2^1 = \log_5^1 \Rightarrow$$
$$\log_5^a = 1,\ \log_2^b = 1,\ 5^1 = a,\ 2^1 = b \Rightarrow a + b = 7.$$

A resposta certa é **A**.

19. Numa progressão aritmética de 21 termos e razão 7, a soma do termo do meio e do seu antecedente é igual ao último termo. Então o último termo é:

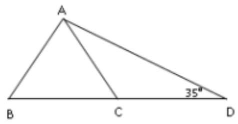
A: 137 B: 147 C: 157 D: 180 E: 210

Resolução : O termo geral tem a forma $a_n = a_1 + d(n-1)$, onde d é a razão, a_1 é o primeiro termo. Temos $a_{11} + a_{10} = a_{21}$, onde o 11^o termo é o termo do meio. Assim,

$$a_{21} = a_{11} + a_{10} \Rightarrow a_1 + 20d = a_1 + 10d + a_1 + 9d$$
$$\Rightarrow a_1 = 20d - 19d = d = 7 \Rightarrow a_{21} = a_1 + 20d = 21d = 21 \cdot 7 = 147.$$

A resposta certa é **B**.

20. Para o triângulo ABD dado na figura são verdadeiras as igualdades $AC = BC = DC$, C pertence ao lado BD e $\angle ADB = 35°$. Então, o $\angle ABC$ é igual a:



A: 55° B: 65° C: 70° D: 80° E: 145°

Resolução : O $\triangle ACD$ é isósceles, pois, $AC = DC$. Logo, $\angle CDA = \angle DAC = 35°$. Assim,

$$\angle CDA + \angle DAC + \angle ACD = 180°$$
$$35° + 35° + \angle ACD = 180° \Rightarrow \angle ACD = 110°.$$

O $\triangle ABC$ é isósceles, pois, $AC = BC$. Logo, $\angle CAB = \angle ABC$. Assim, fazendo $\angle ABC = \alpha$ e $\angle ACD = \beta = 110°$ teremos

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 180°$$
$$2\alpha + (180° - \beta) = 180° \Rightarrow 2\alpha + 180° - 110° = 180° \Rightarrow \alpha = 55°.$$

A resposta certa é **A**.

21. Os números que exprimem o lado, a diagonal, e a área de um quadrado formam uma progressão aritmética, nesta ordem. A diagonal do quadrado mede:

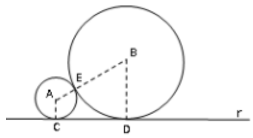
A: $2\sqrt{2}$ B: $2\sqrt{2} - 1$ C: $2 + \sqrt{2}$ D: $4 - \sqrt{2}$ E: $4 + \sqrt{2}$

Resolução : Designando por l o ladro do quadado, d a diagonal do quadrado e A a área do quadrado, temos: $d - l = A - d$. Usando teorema de Pitâgoras, temos $d^2 = l^2 + l^2$. Logo,

$$\sqrt{2}l - l = l^2 - \sqrt{2}l \Rightarrow l^2 + (1 - 2\sqrt{2})l = 0$$
$$\Leftrightarrow l(l + 1 - 2\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow l = 0 \vee l = -1 + 2\sqrt{2}.$$

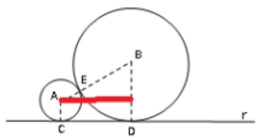
Assim, a diagonal do quadrado é $d = \sqrt{2}l = \sqrt{2}(-1 + 2\sqrt{2}) = 4 - \sqrt{2}$. A resposta certa é **D**.

22. Duas circunferências de centros A e B, respectivamente, são tangentes entre si no ponto E e tangentes à recta r nos pontos C e D, respectivamente. Sabendo que seus raios medem 4 cm e 1 cm, pode-se concluir que o segmento CD mede:



A: 2 cm B: 3 cm C: 4 cm D: 5 cm E: $3\sqrt{2}cm$

Resolução : Considerando a figura



temos $|BD| = |BE| = 4cm$ e $|AE| = |AC| = 1cm$, piis são raios das circunferências, respectivamente. Pelo teorema de Pitâgoras, teremos:

$$|AE|^2 = |CD|^2 + (|BD| - |AE|)^2$$
$$\Rightarrow (4cm + 1cm)^2 = |CD|^2 + (4cm - 1cm)^2$$
$$|CD|^2 = 25cm^2 - 9cm^2 = 16cm^2 \Rightarrow |CD| = 4cm.$$

A resposta certa é **C**.

23. A solução da equação $\log_2^{(x-3)} + 2\log_4^{3^{\log_3^x}} = 2$ é:

A: $S = \{4, \frac{9}{2}\}$, B: $S = \{3, 4\}$ C: $S = \{-1, 4\}$
D: $S = \{4\}$ E: $S = \{3\}$

Resolução : Tendo e conta o domínio de uma função logarítmica, teremos: $x > 0$ e $x - 3 > 0$, de onde obtemos $x > 3$. Assim, usando propriedades de logarítmo $\log_a^b + \log_a^c = \log_a^{bc}$ e $\log_{a^n}^c = \frac{1}{n}\log_a^c$.

$$\log_2^{(x-3)} + 2\log_4^{3^{\log_3^x}} = 2 \Leftrightarrow \log_2^{(x-3)} + 2\log_{2^2}^x = 2 \Leftrightarrow \log_2^{(x-3)} + 2 \cdot \frac{1}{2}\log_2^x = 2$$
$$\Leftrightarrow \log_2^{(x-3)} + \log_2^x = 2 \Leftrightarrow \log_2^{x(x-3)} = 2$$
$$\Rightarrow x(x-3) = 2^2 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 4 \vee x = -1.$$

Visto que $x > 3$, teremos $x = 4$ é a solução da equação. A resposta certa é **D**.

- As outras alternativas contém pontos que não satisfazem a equação dada.

24. A recta $3x+2y-12=0$ intercecta os eixos coordenados OX e OY nos pontos A e B, respectivamente. O ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ é:

A: $M=(3,2)$ B: $M=(-2,2)$ C: $M=(-2,3)$
D: $M=(2,3)$ E: $M=(1,2)$

Resolução : Para o ponto A, fazemos $y=0$, temos $3x-12=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow A(3,0)$. Para o ponto B, fazemos $x=0$, temos $2y-12=0 \Rightarrow y=6 \Rightarrow B(0,6)$. As coordenadas do pont médio de um segmento $C(x_0,y_0)$, $D(x_1,y_1)$ é

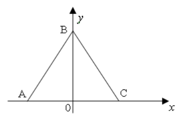
$$N=\left(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2}\right).$$

O ponto médio M é

$$M=(\frac{4+0}{2},\frac{6+0}{2})=(2,3).$$

A resposta certa é **D**.

25. O triângulo ABC é equilátero e o seu lado mede 6 cm. A equação da recta que contém o lado AB é:



A: $y=\sqrt{3}(x-3)$ B: $y=\sqrt{3}(3-x)$ C: $y=\sqrt{3}(x+3)$
D: $y=3(\sqrt{3}-x)$ E: $y=3(x-\sqrt{3})$

Resolução : Tendo em conta a figura, o recta que contéem AB intersecta o eixo OX no ponto A que tem abcissa negativa e módulo igual 3 (metade do lado AB do triângulo) ou seja, $A(-3,0)$. O coeficiente angular da recta é $a=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$. A equação da recta que passa por um ponto $P(x_0,y_0)$ sendo dado o declive a é:

$$y-y_0=a(x-x_0).$$

Assim, a equação da recta que contém AB passa por $A(-3,0)$ e tem declive $a=\sqrt{3}$. Logo,

$$y-0=\sqrt{3}(x+3) \Rightarrow y=\sqrt{3}(x+3).$$

A resposta certa é **C**.

- Note que as equações de rectas das restantes alternativas não passam pelo ponto $A(-3,0)$, e mais, passam por um ponto que está à direita do eiixo OY.

26. Se $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$ então $\frac{6x-2y}{3x+y}$ é igual a:

A. 2 B. 1 C. 3 D. $\frac{2}{3}$ E. $\frac{3}{2}$

Resolução : Temos:

$$\frac{x}{y}=\frac{2}{3} \Rightarrow x=\frac{2}{3}y \Rightarrow \frac{6x-2y}{3x+y}=\frac{6\cdot 2y/3-2y}{3\cdot 2y/3+y}=\frac{4y-2y}{2y+y}=\frac{2y}{3y}=\frac{2}{3}.$$

A resposta certa é **D**.

- Note que fazendo $x=2$ e $y=3$, obtemos $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$ e $\frac{6x-2y}{3x+y}=\frac{2}{3}$.

27. Se durante o processo de secagem as frutas perdem 80% do seu peso, que quantidade de fruta fresca é preciso secar para preparar 1 quilo de fruta seca?

A. $1.2kg$ B. $5kg$ C. $2kg$ D. $8kg$ E. $4kg$

Resolução : Seja x a quantidade de fruta fresca. Sabe-se que 100%-80%=20% de x é igual a 1kg. Assim,

$$0,2 \cdot x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{0,2} = \frac{10}{2} = 5.$$

A resposta certa é **B**.

28. Se uma raiz da equação $x^2 + ax + 1 = 0$ é quatro vezes maior do que outra, então o parâmetro a da equação é igual a:

A. ± 1 B. 0 C. ± 4 D. ± 2 E. ± 2.5

Resolução : Sejam x_1, x_2 as raízes da equação dada e $x_1 = 4x_2$. Então, A soma $x_1 + x_2 = 5x_2 = -a$ e o produto é $x_1 \cdot x_2 = 4x_2^2 = 1$. Temos:

$$\begin{cases} 5x_2 = -a \\ 4x_2^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_2 = -a \\ x_2 = \pm\frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm\frac{5}{2} \\ x_2 = \pm\frac{1}{2} \end{cases}$$

A resposta certa é **E**.

- Com os outros valores do parâmetro a não obtemos uma raíz sendo quatro vezes a outra. Mais, em certos casos não temos raízes reais (caso $a = 0$) ou aobtemos raízes iguais (caso $a = \pm 2$).

29. O produto das raízes da equação $|3 + x| = 2$ é igual a:

A. 6 B. 5 C. -4 D. 4 E. -3

Resolução : Temos:

$$|3 + x| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + x = 2, & \text{se } 3 + x \geq 0 \\ -(3 + x) = 2, & \text{se } 3 + x < 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1, & \text{se } x \geq -3 \\ x = -5, & \text{se } x < -3 \end{cases}$$

As soluções são $x = -1$ e $x = -5$, cujo produto é 5. A resposta certa é **A**.

- Note que para esta equação temos duas raízes, isso pode se verificar graficamente. O produto das soluções não pode ser negativo, pois, isso uma das soluções é positiva, e soma de 3 com um número positivo é impossível ser igual a 2.
- A solução é um número inteiro, como diferença ou soma de números inteiros. Escrevendo $4 = a_1 \cdot b_1$ e $6 = a_2 \cdot b_2$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, não é possível que ambos a_i e b_i, $i = 1, 2$ satisfaçam a equação dada.

30. A soma de todas as raízes da equação $x^2 + \sqrt{x^2} = 4$ é igual a:

A: 1 B: -1 C: 2 D: -2 E: 0

Resolução : Temos:

$$x^2 + \sqrt{x^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + |x| - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0, & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 = 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2) = 0, & \text{se } x \geq 0 \\ (x+1)(x-2) = 0, & \text{se } x < 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \vee x = -2, & \text{se } x \geq 0 \\ x = -1 \vee x = 2, & \text{se } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \vee \\ x = -1 \end{cases}$$

A resposta certa é **C**.

31. Se $2 < x < 3$ e $-2 < y < -1$ então pode-se garantir que a grandeza xy pertence ao intervalo:
A: $]-6,2[$ B: $]-6,-2[$ C: $]3,6[$ D: $]-4,-1[$ E: $]-2,6[$
Resolução : Temos: se $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a < b$ e $c > 0$ então $ac < bc$. Assim, considerando os extremos do intervalo: $2 < x < 3$, teremos $x = 2$, $x = 3$ e:

$$-2 < y < -1 \Rightarrow -2 \cdot 2 < 2y < -1 \cdot 2 \Rightarrow -4 < 2y < -2$$
$$-2 \cdot 3 < 3y < -1 \cdot 3 \Rightarrow -6 < 3y < -3$$

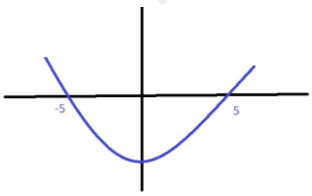
Assim, para $2 < x < y$ e $-2 < y < -1$ teremos $-6 < xy < -2$. A resposta certa é **B**.

- Note que $x > 0$ e $y < 0$ logo, $xy < 0$, assim, as alternativas A, C e E não estão certas pois conté números positivos.
- A alternativa D não contém, por exemplo, o número resultante do produto de $x = \frac{4}{3}$ e $y = -\frac{9}{8}$, $xy = -\frac{3}{2}$.

32. Resolvendo a desigualdade $x - \frac{25}{x} \leq 0$ obtemos o conjunto:
A: $[-5,0[\cup[5,+\infty[$ B: $]-\infty,-5[\cup[5,+\infty[$ C: $[-5,0[\cup]0,5]$
D: $]-\infty,-5[\cup]0,5]$ E: $]0,5]$
Resolução : Temos:

$$x - \frac{25}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-25}{x} \leq 0.$$

Note que $x \neq 0$ pois, não tem sentido a divisão por zero. Se $x > 0$ então, $x^2 - 25 \leq 0$ e se $x < 0$, então $x^2 - 25 \geq 0$. Graficamente temos:



Assim, $x > 0$ e $x^2 - 25 \leq 0$ corresponde ao conjunto $\{x \in]0,5]\}$, e $x < 0$ e $x^2 - 25 \geq 0$ corresponde ao conjunto $\{x \in]-\infty,-5]\}$. Desta forma, a solução é o conjunto $\{x \in]-\infty,-5]\cup]0,5]\}$. A resposta certa é **D**.

- As alternativas A, B não estão certas, pois, incluem por exemplo $x = 10$ que não satisfaz a inequação.
- A alternativa C inclui por exemplo $x = -1$ que não satisfaz a inequação.
- A alternativa E não inclui por exemplo $x = -10$ que satisfaz a inequação.

33. Se $\log 2 = a$ então a grandeza $\log_2^{400}$ é igual a:
A: $1 - 2a$ B: $\frac{20}{a}$ C: $1 + \frac{2}{a}$ D: $4a$ E: $2 + \frac{2}{a}$
Resolução : Usando as seguintes propriedades de logarítmo
$\log_b^{c^n} = n\log_b^c$, $\log_b^c = \frac{\log_d^c}{\log_d^b}$. Temos:

$$\log_2^{400} = \log_2^{4\cdot 100} = \log_2^4 + \log_2^{100} = \log_2^{2^2} + \frac{\log_{10}^{100}}{\log_{10}^2} = 2 + \frac{2}{\log 2} = 2 + \frac{2}{a}.$$

A resposta certa é **E**.

- Note que ao substituir transformar as outras alternativas, substituindo o valor de a, não encontramos $\log_2^{400}$.

34. Qual dos números seguintes faz parte do contradomínio da função
$y = 2\sin x + 3$?

A: -1 B: -2 C: 0 D: 4 E: 6

Resolução : Usando $-1 \leq \sin x \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R},$ teremos

$$-2 \leq 2\sin x \leq 2$$
$$-2+3 \leq 2\sin x + 3 \leq 2+3 \Rightarrow 1 \leq 2\sin x + 3 \leq 5.$$

Desta forma, o contradoínio da função $f(x) = 2\sin x + 3$ é $[1, 5]$. Vemos que das alternativas dadas, apenas o número 4 pertence ao contradomínio. A resposta certa **D**.

35. Considere a função $f(x) = \sin x$, definida no segmento $[0, 2\pi]$ e a funão constante $g(x) = c$ com $-1 \leq c \leq 1$. O conjunto dos pontos de intersecção dos gráficos de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ é:

A. possui um só elemento
B. possui dois elementos
C. é vazio
D. possui entre um e três elementos
E. é um subconjunto do conjunto {1,2,3}

Rsolução : Suponhamos que $c = 0$. Então o conjunto das soluções de $\sin x = 0$ em $[0, 2\pi]$ é $\{0, \pi, 2\pi\}$. Suponhamos que $c = 1$. Então o conjunto das soluções de $\sin x = 1$ em $[0, 2\pi]$ é $\{\pi/2\}$. Suponhamos que $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Então o conjunto das soluções de $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ em $[0, 2\pi]$ é $\{\pi/4, 3\pi/4\}$. Assim, o conjunto solução de $f(x) = g(x)$ pode ter 1 elemento, dois elementos, ou 3 eleementos, dependendo do valor de c. Mais, para um $-1 \leq c \leq 1$ fixo, a equação $\sin(x) = c$ tem solução em $[0, 2\pi]$. A resposta certa é **D**.

36. A raiz da equação $\sin(2x) - \cos x = 0$ que pertence ao intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ é:

A: $\frac{\pi}{2}$ B: $\frac{3\pi}{4}$ C: $\frac{2\pi}{3}$ D: $\frac{\pi}{3}$ E: $\frac{5\pi}{3}$

Resolução : Temos:

$$\sin(2x) - \cos(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(x) - \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x)(2\sin x - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \cos(x) = 0 \vee 2\sin(x) - 1 = 0 \Rightarrow \cos(x) = 0 \vee \sin(x) = \frac{1}{2}.$$

Visto que $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\cos(x) \neq 0$ e $\sin(\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2}$. Assim, $x = \frac{5\pi}{6}$. A resposta certa é **A**.

- Note que se substituirmos na equação dada estas alternativas com excepção de A, não obtemos identidade.

37. Se $x + y = 2$ e $xy = -4$ então o valor da expressão $x^2 + y^2$ é igual a:

A: 14 B: 18 C: 12 D: 10 E: 16

Resolução : Temos:

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 2xy = (x+y)^2 - 2xy = 2^2 - 2 \cdot (-4) = 12.$$

A resposta certa é **C**.

38. Qual é a negação da expressão lógica $\exists x \in \mathbb{R}\, f(x) = 0$?

A: $\exists x \in \mathbb{R}\, f(x) \neq 0$ B: $\exists x \in \mathbb{R}\, f(x) < 0$ C: $\forall x \in \mathbb{R}\, f(x) \neq 0$
D: $\forall x \in \mathbb{R}\, f(x) = 0$ E: $\exists x \in \mathbb{R}\, f(x) > 0$

Resolução : Temos:

$$\neg(\exists x \in \mathbb{R}\, f(x) = 0) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (\neg f(x) = 0) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0.$$

A resposta certa é **C**.

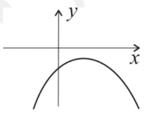
- A alternativa A não está certa, pelo seguinte exemplo. Se $f(x) = (x-1)^2$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$, o ponto $x = 1$ satisfaz esta condição . A proposição é verdadeira. A sua negação tem valor lógico falso. Contudo, em A temos $\exists x \in \mathbb{R}\, f(x) \neq 0$, que neste caso, existe, por exemplo $x = 2$ tal que $f(2) \neq 0$, que também tem valor lógico verdadeiro. Então esta não é negação da proposição inicial.
- A alternativa B não está certa, pelo seguinte exemplo. Se $f(x) = x - 1$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$, o ponto $x = 1$ satisfaz esta condição . A proposição é verdadeira. A sua negação tem valor lógico falso. Contudo, em B temos $\exists x \in \mathbb{R}\, f(x) < 0$, que neste caso, existe, por exemplo $x = 0$ tal que $f(0) < 0$, que também tem valor lógico verdadeiro. Então esta não é negação da proposição inicial.
- A alternativa D não está certa, pelo seguinte exemplo. Se $f(x) = x^2+1$, $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$. A proposição é falsa. A sua negação tem valor lógico verdade. Contudo, em D temos $\forall x \in \mathbb{R}\, f(x) = 0$, que neste caso, não é verdade que qualquer $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, que também tem valor lógico falso. Então esta não é negação da proposição inicial.
- A alternativa E não está certa, pelo seguinte exemplo. Se $f(x) = x - 1$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$, o ponto $x = 1$ satisfaz esta condição . A proposição é verdadeira. A sua negação tem valor lógico falso. Contudo, em E temos $\exists x \in \mathbb{R}\, f(x) > 0$, que neste caso, é verdade que existe $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$, por exemplo, $x = 2$ que também tem valor lógico verdade. Então esta não é negação da proposição inicial.

39. Sejam dadas as funções $f(x) = 2x$, $g(x) = 1 - x$. O valor $f[g(0) + 1]$ é igual a:

A: 2 B: 4 C: 0 D: -2 E: -4

Resolução : Temos: $g(0) = 1$, $g(0 + 1) = 2$, $f[g(0) + 1] = f(2) = 2 \cdot 2 = 4$. A resposta certa é B.

40. À direita está representado o gráfico de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ cujos parâmetros satisfazem as desigualdades:



A: $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$ B: $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ C: $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$
D: $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$ E: $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$

Resolução : Tenso em conta a interpretação dos parâmetros, temos:

- Para $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$ correponde a uma parábola com convidade virada para cima. Isto contradiz o gráfico da figura acima. Desta forma, esta alternativa não corresponde aos parâmetros do gráfico dado.
- Para $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ correponde a uma parábola com convidade virada para cima. Isto contradiz o gráfico da figura acima. Desta forma, esta alternativa não corresponde aos parâmetros do gráfico dado.

- Para $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$ correponde a uma parábola com convidade virada para baixo, ordenada na origem positiva. Isto contradiz o gráfico da figura acima cujo ordenada na origem é negativa. Desta forma, esta alternativa não corresponde aos parâmetros do gráfico dado.
- Para $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$ correponde a uma parábola com convidade virada para baixo, ordenada na origem negativa, eixo de simetria $x = -\frac{b}{2a} > 0$. Estas características correspondem ao gráfico da figura acima cujo. Esta **alternativa é correcta.**
- Para $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$ correponde a uma parábola com convidade virada para baixo, ordenada na origem negativa, eixo de simetria $x = -\frac{b}{2a} < 0$. Isto contradiz o gráfico da figura acima cujo eixo de simetria está situado à direita do eixo OY. Desta forma, esta alternativa não correponde aos parâmetros do gráfico dado.

A resposta certa é **D**.

41. Sabendo que a função quadrática $f(x) = x^2 + 2px - 3$ atinge o seu mínimo no ponto $x = 1$ calcule a ordenada do ponto do gráfico de f com abcissa $x = 2$.

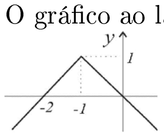
A: -3 B: 5 C: -1 D: 2 E: 4

Resolução : A função $f(x)$ atinge o seu mínimo no ponto correspondente ao vértice. Assim,

$$x_v = -\frac{2p}{2} = -p = 1 \Rightarrow p = -1.$$

Desta forma, $f(x) = x^2 - 2x - 3$ e $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 - 3 = -3$. A resposta certa é **A**.

42. O gráfico ao lado representa a função



A: $y = 1 - |x - 1|$ B: $y = 1 - |x + 1|$ C: $y = -1 + |x + 1|$
D: $y = -1 + |x - 1|$ E: $y = -1 - |x - 1|$

Resolução : O gráfico dado corresponde a uma translação de gráfico da forma $y = |x|$. Este tem concavidade virada para cima, mas quando o coeficiente do $|x|$ é -1, obtemos $y = -|x|$ que tem a concavidade virada para baixo e com o vértice no ponto $x = 0$. Transladamos 1 unidade para à esquerda e obtemos $y = -|x+1|$, com o vértice em $x = -1$. Translando 1 unidade para cima, obtemos $y = 1-|x+1|$ que corresponde ao gráfico dado. A resposta certa é **B**.

- As alternativas A, C e E não estão certas, pois, por exemplo, não passam pelo ponto $(-1, 1)$.
- A alternativa D não está certa, pois, por exemplo, não passa pelo ponto $(-2, 0)$.

43. Se a e b são raizes diferentes da equação $x^2 - 5x - 1 = 0$, então a grandeza $a^{-1} + b^{-1}$ é:
A: -8 B: 8 C: -5 D: 5 E: 4.5

Resolução : Temos $b_1^2 - 4a_1c_1 = 5^2 - 4 \cdot (-1) = 29 > 0$, então a, b são números reais. Temos:

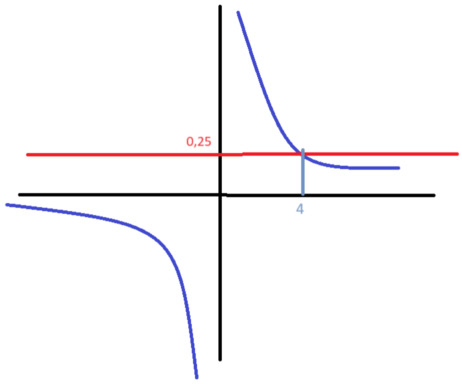
$$a^{-1} + b^{-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{5}{-1} = -5,$$

$x^2 + \frac{b_1}{a_1}x + \frac{c_1}{a_1} = x^2 - Sx + P$, onde S é a soma das raízes e P é o produto das raízes.

44. Todas as soluções da inequação $x^{-1} < 0,25$ formam o conjunto:

A: $]-\infty, 4[$ B: $]0, 4[$ C: $[4, +\infty[$
D: $]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$ E: $]-4, 0[$

Resolução : Temos: $x^{-1} < 0,25 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{4}$. Fazendo o esboço gráfico, temos:



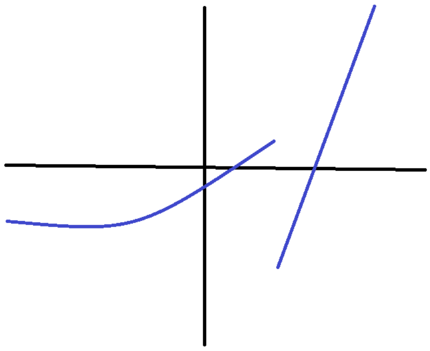
Desta forma, $x^{-1} < 0,25$ quando $x \in]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$. A resposta certa é **D**.

45. Seja dada uma função $y = f(x)$ definida em $\mathbb{R}$ que satisfaz à seguinte condição : para todo $a \in \mathbb{R}$ recta horizontal $y = a$ e o gráfico da função f tem pelo menos um ponto em comum. É correcto dizer que a função f é:

A. injectiva B. sobrajectiva C. contínua D. crescente E. decrescente

Resolução : Por definição, $f(x)$ é sobrejectiva. A resposta certa é **B**.

- Note que não se pode afirmar que f é injectiva, pois, for exemplo $f(x) = x^3 - 8x$ tem estas características, mas $f(0) = f(2) = 0$, isto é, não é injectiva. Esta função também não é crescente e não é decrescente.
- Uma função contínua à esquerda, com o contradomínio $\mathbb{R}$, descontinuidade do tipo salto para baixo satisfaz as condições dadas mas não é contínua. Por exemplo,



46. O domínio de definição da função $f(x) = \lg(\lg x)$ é:

A: $]0; +\infty[$ B: $]1; +\infty[$ C: $[-\infty; 0,1[$ D: $]0; 0,1[$ E: $]0,1; +\infty[$

Resolução : Temos: $x > 0$ e $\lg(x) > 0$. Resolvendo estas inequações, teremos: $x > 0$ e $x > 1$, de onde concluimos que $x > 1$.

A resposta certa é **B**.

- Note que para $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{20}$ a expressão não tem sentido.

47. O conjunto imagem (o contradomínio) da função $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$ é:

A: $[0;+\infty[$ B: $[-1;1]$ C: $[0;4]$ D: $[0;2]$ E: $]-\infty;+\infty[$

Resolução : Temos:

$$f(x) = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + \sin(2x).$$

Sabe-se que $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \sin x \leq 1$. Assim,

$$-1 \leq \sin(2x) \leq 1 \Rightarrow 1 + (-1) \leq 1 + \sin(2x) \leq 1 + 1 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 2.$$

- Note que as funções $\sin x$ e $\cos x$ são funções limitadas e a soma, produto de funções limitadas resulta em funções limitadas. Desta forma, as alternativas A e E não estão correctas.
- Note que o quadrado de um número real é sempre não negativo. A alaternativa B não está correcta.

48. Escolha afirmação falsa:

A. O domínio da função $y = \sin x$ é $\mathbb{R}$
B. O conjunto imagem da função $y = \tan x$ é [-1,1]
C. A função $y = \lg x$ é crescente no seu domínio
D. O conjunto imagem da função $y = 2^{-x}$ é $]0,+\infty[$
E. A função $y = \cos x$ é decrescente no intervalo $[0,\pi]$

Resolução : Temos:

- O domínio da função $y = \sin x$ é $\mathbb{R}$. É verdade.
- O conjunto imagem da função $y = \tan x$ é [-1,1]. **É falso**, pois $\tan(x) \to +\infty$ quando $x \to \frac{\pi}{2}$.
- A função $y = \lg x$ é crescente no seu domínio. É verdade. Pode-se verificar graficamenete ou estudar o sinal da primeira derivada.
- O conjunto imagem da função $y = 2^{-x}$ é $]0,+\infty[$. É verdade. Pode-se verificar graficamenete.
- A funcao $y = \cos x$ é decrescente no intervalo $]0,\pi[$. É verdade. Pode-se verificar graficamenete ou estudar o sinal da primeira derivada.

A resposta certa é **B**.

49. A sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ em que $a_k = -(0,5)^{-k},\ k \in \mathbb{N}$ é:

A. progressão aritmética crescente
B. progressão geométrica crescente
C. progressão geométrica decrescente
D. progressão geométrica que não é crescente nem decrescente
E. uma sequência que não é progressão aritmética nem geométrica

Resolução : Temos:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{-(0,5)^{-k-1}}{-(0,5)^{-k}} = (0,5)^{-1} = 2,\ k = 1, 2, \ldots.$$

Desta forma, a_k é uma progressão geométrica de razão 2, $a_1 = -2,\ a_2 = -4,\ a_3 = -8$. Logo, a_k é uma progressão geométrica decrescente. A resposta é **C**.

50. O termo geral a_n da sequência $-1, \frac{5}{2}, -\frac{25}{6}, \frac{125}{24}, -\frac{625}{1206}, \ldots$ (a sequência começa de a_1) é:

A: $\frac{(-5)^n}{5n!}$ B: $\frac{(-5)^n}{(n-1)!}$ C: $\frac{(-5)^{n-1}}{n!}$ D: $\frac{(-1)^{n+1}5^n}{n!}$ E: $\frac{(-1)^n 5^{n-1}}{(n-1)!}$

Resolução : Temos: $a_n = \frac{u_n}{v_n}$. Vamos determinar os termos gerais das sucessões u_n e v_n. Temos: $u_1 = -1$, $u_2 = 5$, $u_3 = -25$, $u_4 = 125$, $u_5 = 625$,... e $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, $v_3 = 6$, $u_4 = 24$, $u_5 = 120$,...
Assim,

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = -5, \; k = 1, 2, \ldots$$

ou seja, u_n é uma progressão geométrica de razão $q = -5$. O termo geral é:

$$u_n = u_1 q^{n-1} = -1 \cdot (-5)^{n-1} = (-1)^n 5^{n-1}.$$

Podemos notar que $v_n = n!$. Desta forma,

$$a_n = \frac{u_n}{v_n} = \frac{(-1)^n 5^{n-1}}{n!}$$

A resposta certa é **A**.

- Note que as outras alternativas dão valores diferentes de a_1, a_2, a_3, ...

51. O maior número natural n para o qual se verifica a desigualdade
$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n \leq 100$ é:

A: 50 B: 11 C: 10 D: 9 E: 5

Resolução : Temos: $6 - 4 = 4 - 2 = 2$, assim, a soma $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n$ é soma de n termos de uma progressão aritmética de razão $d = 2$. A soma dos pimeiros n termos duma progressão aritmética de razão d é

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow s_n = \frac{2 + 2n}{2} \cdot n \Rightarrow s_n = (n + 1)n.$$

Assim,

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n \leq 100 \Leftrightarrow n(n + 1) \leq 100 \Leftrightarrow n^2 + n - 100 \leq 0.$$

Vemos que se $n = 10$, $n^2 + n - 100 > 0$, mas se $n = 9$, $n^2 + n - 100 < 0$. Assim, o maior número natural que satisfaz a desigualdade é $n = 9$. A resposta é **D**.

52. O valor da derivada da função $y = \frac{\ln x}{x}$ no ponto $x_0 = e^2$ é igual a:

A: $\frac{1-e}{e^4}$ B: $\frac{1-2e}{e^4}$ C: $\frac{3}{e^4}$ D: $\frac{1-e}{1+e^2}$ E: $-\frac{1}{e^4}$

Resolução : Temos:

$$y' = \frac{x(\ln x)' - x' \ln x}{x^2} = \frac{x/x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$
$$y'(x_0) = \frac{1 - \ln e^2}{(e^2)^2} = \frac{1 - 2\ln e}{e^4} = -\frac{1}{e^4}.$$

A resposta certa é **E**.

53. Seja dada uma função $y = f(x)$ definida em $\mathbb{R}$. A afirmação verdadeira é:

A. Se a função f é contínua em A, então ela admite derivada em todos os pontos $x \in \mathbb{R}$;

B. Se $x = 1$ é ponto máximo da função de f, então a derivada nesse ponto $f'(1)$ é igual a zero.

C. Se $f'(1) = 0$, então $x = 1$ é abcissa do ponto máximo ou do ponto mínimo da função f.

D. Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então o gráfico da função f, intersecta o eixo OX.

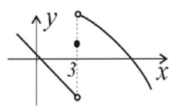
E. Se em todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ existe a derivada $f'(x)$ então a função f é contínua em $\mathbb{R}$.

Resolução : Temos:

- Se a função f é contínua em A, então ela admite derivada em todos os pontos $x \in \mathbb{R}$. Não é verdade. Por exemplo, $f(x) = |x|$ não tem derivada no ponto $x = 0$ mas ela é contínua em $\mathbb{R}$.
- Se $x = 1$ é ponto máximo da função de f, então a derivada nesse ponto $f'(1)$ é igual a zero. Não é verdade. Por exemplo, $f(x) = 1 - |x - 1|$ tem máximo no ponto de abcissa $x = 1$ mas ela não tem derivada neste ponto, logo $f'(1) \neq 0$.
- Se $f'(1) = 0$, então $x = 1$ é abcissa do ponto máximo ou do ponto mínimo da função f. Não é verdade. Por exemplo, $f(x) = (x-1)^3$ tem derivada no ponto $x = 1$ igual a zero, mas ela não tem máximo e nem mínimo neste ponto.
- Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então o gráfico da função f, intersecta o eixo OX. Não é verdade. Por exemplo, $f(x) = 2^x$ tem derivada positiva para qualquer x mas ela não intersecta o eixo OX.
- Se em todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ existe a derivada $f'(x)$ entÃ£o a função f é contínua em $\mathbb{R}$. **Sim, é verdade.**

A resposta certa é **E**.

54. Para a função f, representada na figura ao lado, o ponto de abscissa $x = 3$



A. não é ponto de descontinuidade
B. é ponto de descontinuidade eliminável
C. é ponto de descontinuidade não-eliminável de 1a espécie
D. é ponto de descontinuidade não-eliminável de 2a espécie
E. nenhuma das alternativas anteriores.

Resolução : Temos:

- Não é ponto de descontinuidade. Não é verdade, pois,
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x).$$
- É ponto de descontinuidade eliminável. Não é verdade, pois,
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x).$$
- É ponto de descontinuidade não-eliminável de 1a espécie. Sim, pois,
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) \text{ é finito}, \ \lim_{x\to 3^+} f(x) \text{ é finito}, \ f(3) \text{ é finito}$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x).$$
- É ponto de descontinuidade não-eliminável de 2a espécie. Não é verdade, pois,
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) \text{ é finito }, \ \lim_{x\to 3^+} f(x) \text{ é finito.}$$

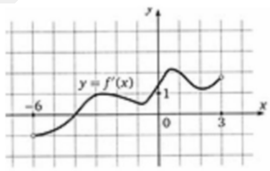
A resposta certa é **C**.

55. Para a função $f(x)=|x|$ é correcto afirmar que:
A. não existe $\lim_{x\to0^-}f(x)$ e $\lim_{x\to0^+}f(x)$
B. existe $\lim_{x\to0^-}f(x)$ e $\lim_{x\to0^+}f(x)$ que não são iguais;
C. no ponto $x=0$ a função é contúna e $f'(0)=0$
D. no ponto $x=0$ a função é contúna e $f'(0)=1$
E. no ponto $x=0$ a função é contúna mas não existe $f'(0)$
Resolução : Temos:

- Não existe $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ e $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$. Não é verdade, os limites existem e são iguais, pois,
$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}-x=0,\ \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x=0.$$
- Existe $\lim_{x\to0^-}f(x)$ e $\lim_{x\to0^+}f(x)$ que não são iguais. Não é verdade, os limites existem e são iguais.
- No ponto $x=0$ a função é contúna e $f'(0)=0$. Não é verdade, pois, f é contínua mas $f'(0)$ não existe, pois, é um ponto de bico no gráfico, ou seja, as derivadas laterais de f em $x=0$ são diferentes.
- No ponto $x=0$ a função é contúna e $f'(0)=1$. Não é verdade, pois, f é contínua mas $f'(0)$ não existe, pois, é um ponto de bico no gráfico, ou seja, as derivadas laterais de f em $x=0$ são diferentes.
- No ponto $x=0$ a função é contúna mas não existe $f'(0)$. É verdade, pois, f é contínua mas $f'(0)$ não existe, pois, é um ponto de bico no gráfico, ou seja, as derivadas laterais de f em $x=0$ são diferentes.

A resposta certa é **E**.

56. Na figura é dado o gráfico da derivada $y=f'(x)$ da função $y=f(x)$. Em que ponto o intervalo $[-6,3]$ a função $y=f(x)$ atinge o seu mínimo?

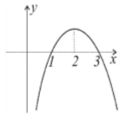


A: -6 B: $0,5$ C: -4 D: 2 E: 3

Resolução : Vemos que a derivada se anula no ponto de abcissa $x=-4$ e a derivada muda de sinal negativo para positivo ao passar por este ponto. Logo, a função atinge um mínimo neste ponto. A resposta é **D**.

- Note que os extremos são atingidos nos pontos onde a derivada é igual a zero ou não existe. Mas em $x=-6$, $x=0,5$, $x=2$ e $x=3$ a derivada existe e é diferente de zero.

57. Na figura a baixo está representado o gráfico da função derivada $y=f'(x)$. Em relação a função $y=f(x)$ é correcto afirmar que:



A. $x = 2$ é ponto de máximo da função f;

B. no intervalo $]2, 3[$ a função f é decrescente;

C. $x = 1$ é ponto de máximo da função f;

D. no intervalo $]-\infty, 1[$ a função f é decrescente;

E. $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$ são pontos extremos da função f;

Resolução : Temos:

- $x = 2$ é ponto de máximo da função f. É falso. Pois, os máximos são atingidos nos pontos onde a derivada é igual a zero ou não existe. Mas em $x = 2$, a derivada existe e é diferente de zero.
- No intervalo $]2, 3[$ a função f é decrescente. É falso, pois a derivada é positiva neste intervalo e assim, a função é crescente.
- $x = 1$ é ponto de máximo da função f. É falso, pois a derivada muda de sinal negativo para positivo ao passar por este ponto. Logo, a função atinge um mínimo neste ponto.
- No intervalo $]-\infty, 1[$ a função f é decrescente. **É verdade.** Pois, a derivada é negativa neste intervalo e assim, a função é decrescente.
- $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$ são pontos extremos da função f. É falso, pois $x = 2$ não é extremo.

Resposta certa **D**.

Exame de Matemática de 2014

Correcção do exame de Matemática de 2014

1. O número $0,0004$ usando notação científica pode ser escrito na forma:
   A: $4 \cdot 10^{-6}$ B: $4 \cdot 10^{-4}$ C: $4 \cdot 10^{-5}$ D: $4 \cdot 10^{6}$ E: $4 \cdot 10^{-3}$
   Resolução: $0,0004 = \dfrac{4}{10000} = 4 \cdot 10^{-4}$. Então, a resposta certa é a alternativa **B**.

2. O número $\sqrt[4]{0,2} \cdot \sqrt{0,001 \cdot 400000} \cdot \sqrt[4]{0,008}$
   A: 8 B: 4 C: $0,2$ D: 40 E: $0,4$
   Resolução: Temos:
$$\begin{aligned}\sqrt[4]{0,2} \cdot \sqrt{0,001 \cdot 400000} \cdot \sqrt[4]{0,008} &= \sqrt[4]{0,2} \cdot \sqrt[4]{0,008} \cdot \sqrt{0,001 \cdot 400000}\\ &= \sqrt[4]{0,2 \cdot 0,008} \cdot \sqrt{0,001 \cdot 400000} = \sqrt[4]{2 \cdot 10^{-1} \cdot 8 \cdot 10^{-3}} \cdot \sqrt{10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{5}}\\ &= \sqrt[4]{16 \cdot 10^{-4}} \cdot \sqrt{4 \cdot 10^{2}} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 10^{-4}} \cdot \sqrt{2^2 \cdot 10^{2}} = 2 \cdot 10^{-1} \cdot 2 \cdot 10 = 4\end{aligned}$$
   Então, a resposta certa é a alternativa **B**.

3. Efectuando a operação $\sqrt{45} + \sqrt{5}$ obtém-se:
   A: 5 B: $\sqrt{5}$ C: $4\sqrt{5}$ D: 3 E: $3\sqrt{5}$
   Resolução: $\sqrt{45} + \sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5} + \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$. Portanto, a resposta é alternativa **C**.

4. Se $\frac{3}{7}$ dum certo valor é 195Mts, a quanto corresponde $\frac{4}{5}$ do mesmo valor?
   A: $855Mts$ B: $3145Mts$ C: $364Mts$ D: 655 E: $545Mts$
   Resolução: Seja x o valor em quetão, então temos $\frac{3}{7}x = 195$, logo $x = \frac{195 \cdot 7}{3} = 455$. Deste modo, $\frac{4}{5}x = \frac{4}{5} \cdot 455 = 4 \cdot 91 = 364$. A alternativa certa é **C**.

5. Calculando a expressão $\dfrac{14}{5 + \frac{1}{2 - \frac{1}{3}}} + \dfrac{16}{5 - \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}$:
   A: 5 B: $\frac{1}{5}$ C: $\frac{2}{5}$ D: 6 E: 4
   Resolução: Temos:
$$\begin{aligned}\frac{14}{5 + \frac{1}{2 - \frac{1}{3}}} + \frac{16}{5 - \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} &= \frac{14}{5 + \frac{1}{\frac{2 \cdot 3 - 1}{3}}} + \frac{16}{5 - \frac{1}{\frac{2 \cdot 3 + 1}{3}}} = \frac{14}{5 + \frac{3}{5}} + \frac{16}{5 - \frac{3}{7}}\\ &= \frac{14}{\frac{25+3}{5}} + \frac{16}{\frac{35-3}{7}} = \frac{5 \cdot 14}{28} + \frac{7 \cdot 16}{32} = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{12}{2} = 6.\end{aligned}$$
   A resposta certa é a alternativa **D**.

6. Dado que uma grandeza sofreu duas diminuições sucessivas, uma de 10% e outra de 30%. Então a diminuição total dessa grandeza em percentagem é:

   A: 40% B: 0 e 63% C: 37% D: 20% e 4 E: Nenhuma das anteriores

   Resolução: Seja x a grandeza em questão, x_1 a grandeza após a primeira dininuição e x_2 o valor da grandeza após a segunda diminuição. Então após a primeira diminuição temos $x_1 = x - 0,1x = 0,9x$. Aplicando a segunda diminuição temos, $x_2 = x_1 - 0,3x_1 = 0,9x - 0,3 \cdot 0,9x = 0,9x - 0,27x = 0,63x$, logo a diminuição total percentual é $(1 - 0,63) \cdot 100\% = 37\%$.

   A resposta certa é a alternativa **C**.

7. Simplificando a expressão $\dfrac{x^4 - 2x^3y + x^2y^2}{x^4 - x^2y^2}$ tem-se:

   A: $\frac{x+y}{x-y}$ B: $\frac{x-y}{x+y}$ C: $\frac{2x-y}{x+y}$ D: $\frac{y}{x+y}$ E: $\frac{x+y}{x}$

   Resolução: Factorizando o numerador e o denominador temos:

$$\frac{x^4 - 2x^3y + x^2y^2}{x^4 - x^2y^2} = \frac{x^2(x^2 - 2xy + y^2)}{x^2(x^2 - y^2)} = \frac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{x-y}{x+y}.$$

   Portanto, a resposta certa é a alternativa **B**.

   - Assume-se que $x \neq 0$ e $x - y \neq 0$ para se efectuar a simplificação.

8. O valor dse $A = |1 - \sqrt{2}|$ é:

   A: $1 - \sqrt{2}$ B: $1 + \sqrt{2}$ C: $\sqrt{2} - 1$ D: $\sqrt{2}$ E: Nenhuma das anteriores

   Resolução: Note que o módulo de um número nunca é um número negativo colocando em evidência -1 dentro do módulo, temos: Temos $A = |1 - \sqrt{2}| = |(-1)\cdot(-1+\sqrt{2})| = |-1|\cdot|-1+\sqrt{2}| = 1\cdot|\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$, visto que $\sqrt{2} > 1$. Assim, a resposta certa é **C**.

9. Se para cada 100 atletas 35 são mulheres, a razão entre o número de mulheres e o número de homens é de:

   A: $\frac{7}{20}$ B: $\frac{20}{7}$ C: $\frac{7}{13}$ D: $\frac{13}{7}$ E: $\frac{13}{20}$

   Resolução : Se em cada 100 atletas 35 são mulheres, então $100 - 35 = 65$ é o número de atletas homens. Sendo assim a razão entre o número de mulheres e o número de homens é $\frac{35}{65} = \frac{7}{13}$. Logo, a resposta certa é **C**.

10. Previa-se distribuir 1200 garrafas de refrescos a um certo número de pessoas. Afinal apareceram 4 pessoas a menos e assim cada uma das presentes recebeu mais 10 garrafas. Quantas pessoas eram?

    A: 24 pessoas B: 30 pessoas C: 20 pessoas
    D: 15 pessoas E: 4 pessoas

    Resolução : Seja x o número de pessoas e cada pessoa receberia y garrafas de refrescos. Então,

$$\begin{cases} \frac{1200}{x} = y \\ \frac{1200}{x-4} = y + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 1200 \\ \frac{1200x}{x-4} = xy + 10x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 1200 \\ 1200x = (1200 + 10x)(x - 4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy = 1200 \\ 1200x = 1200x + 10x^2 - 4800 - 40x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 1200 \\ 10x^2 - 40x - 4800 = 0 \end{cases}$$

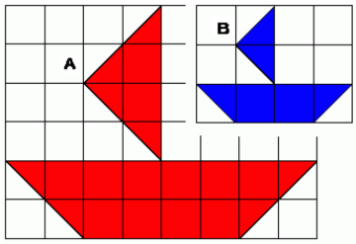
$$\Rightarrow \begin{cases} xy = 1200 \\ x^2 - 4x - 480 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} xy = 1200 \\ x^2 - 4x - 480 = 0 \end{cases}$$

Calculando $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-480) = 1936$, então

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{1936}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 44}{2} \Longrightarrow x = 24 \vee x = -20.$$

Visto que o número de pessoas nunca é negativo então $x = 24$ pessos. Então, a resposta certa é **A**.

Na figura estão representados esquemas de dois barcos à vela. Cada um dos barcos é constituido por uma vela (a parte de cima) e um casco (a parte de baixo). Em relação a figura responda as questões 11 **e** 12.



11. A área da vela do barco maior é de $16\,cm^2$, logo a área do casco do barco menor mede:

A: $12\,cm^2$ B: $6\,cm^2$ C: $3\,cm^2$ D: $8\,cm^2$ E: $4\,cm^2$

Resolução : Seja x a medida do lado de cada quadradinho da grelha da figura. Então, o triângulo maior tem como base $4x$ e altura $2x$, logo $A_{\triangle_A} = \frac{4x \cdot 2x}{2} = 4x^2 = 16\,cm^2 \Longrightarrow x = 2\,cm$. Por outro lado o casco do barco menor é um trapézio de base maior $B_B = 4x = 4 \cdot 2\,cm = 8\,cm$, base menor $b_B = 2x = 4\,cm$ e altura $h_B = x = 2\,cm$. Portanto, a área do casco do barco menor será $A_c = \frac{(B_B + b_B) \cdot h_B}{2} = \frac{(8+4) \cdot 2}{2} = 12\,cm^2$. Logo, a resposta certa é **A**.

12. A razão entre o desenho representando o barco A e o barco B é:

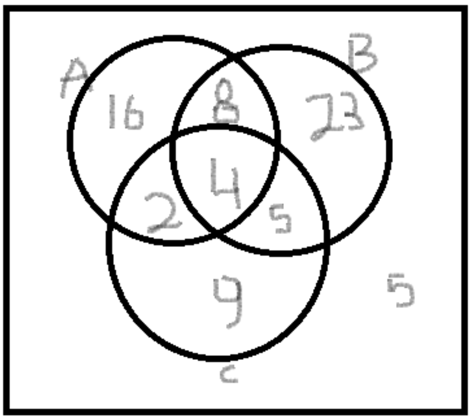
A: 4 B: $\frac{1}{4}$ C: $\frac{1}{2}$ D: 2 E: Nenhuma das anteriores

Reolução : Vemos que os dois barcos são semelhantes, então a razão entre as suas medidas correspondentes é uma constantes. Do exercício 11 temos que $b_A = 4x$, $b_B = 2x$, então $\frac{b_A}{b_B} = \frac{4x}{2x} = 2$. Desta forma, a resposta certa é **C**.

13. Num prédio foi efectuada uma pesquisa sobre os frequentadores das lanchonetes A, B e C e constatou-se que 30, 40 e 20 indivíduos frequentavam A, B e C, reespectivamente; 12 frequentavam A e B; 9 frequentavam B e C; 6 frequentavam A e C; 4 frequentavam A, B e C; 5 não frequentavam nenhuma lanchonete. O número de moradores do prédio é:

A: 90 B: 80 C: 72 D: 92 E: 62

Resolução : Sejam A, B e C os conjuntos de moradores que frequentam lanchonete A, B e C, reespectivamete. Usando peoperações de conjuntos, temos: $|A| = 30$, $|B| = 40$, $|C| = 20$, $|A \cap B| = 12$, $|A \cap C| = 6$, $|B \cap C| = 9$ e $|(A \cup B \cup C)^c| = 5$. $|(A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)| = 12 - 4 = 8$, $|(B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)| = 9 - 4 = 5$, $|(A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)| = 6 - 4 = 2$. Assim $|A \setminus (B \cup C)| = 30 - 8 - 2 - 4 = 16$, $|B \setminus (A \cup C)| = 40 - 8 - 5 - 4 = 23$ e $|C \setminus (B \cup A)| = 20 - 2 - 5 - 4 = 9$. Usando o diagrama de Venn, temos:



Com base nesse diagrama temo que o número total de moradores é $16+8+23+5+9+2+4+5=72$. Desta forma, a resposta certa é alternativa **C**.

14. Simplificando a expressão $\dfrac{(n+3)!-(n+2)!}{(n+2)!+(n+2)\cdot n!}$, $n\in\mathbb{N}$, obtém-se:

    A: $n(n+1)$ B: $n!$ C: $n+2$ D: $n+3$ E: $n+1$

    Resolução : Temos,

$$\frac{(n+3)!-(n+2)!}{(n+2)!+(n+2)\cdot n!}=\frac{(n+3)\cdot(n+2)!-(n+2)!}{(n+2)\cdot(n+1)!+(n+2)\cdot n!}=\frac{(n+2)!\cdot[(n+3)-1]}{(n+2)[(n+1)!+n!]}$$
$$=\frac{(n+2)!}{(n+1)\cdot n!+n!]}=\frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n!}{[(n+1)+1]\cdot n!}=\frac{(n+2)\cdot(n+1)}{(n+2)}=n+1.$$

    Assim, a altenativa correcta é **E**.

15. Para que valores de k, a equação $x^2-kx+9=0$ tem uma solução dupla?

    A: $k=\pm9$ B: $k=\pm6$ C: $k=\pm2$ D: $k=\pm3$ E: $k=\pm5$

    Resolução : Uma equação quadratica tem uma raiz dupla se $\Delta=b^2-4ac=0$. Para a quação dada $\Delta=k^2-4\cdot1\cdot9=k^2-36=0$ se e somente se $k=\pm6$. Então, a resposta certa é **B**.

    - As outras alternativas não estão correctas porque os seus valores de k não satisfazem a equação $k^2-36=0$.

16. Se $|2-4x|<1$, então

    A: $\frac{3}{4}<x<\frac{1}{4}$ B: $\frac{3}{4}<x>\frac{1}{4}$ C: $\frac{1}{4}<x<\frac{3}{4}$ D: $x\in]-\infty,\frac{1}{4}[\cup]\frac{3}{4},+\infty[$ E: $\emptyset$

    Resolução: Definindo a inequação modular temos:

$$-1<2-4x<1\Longrightarrow -1-2<-4x<1-2\Longrightarrow -3<-4x<-1\Longrightarrow \frac{-1}{-4}<x<\frac{-3}{-4}\Longrightarrow \frac{1}{4}<x<\frac{3}{4}.$$

    Desta forma a resposta certa é **C**.

- Na primeira alternativas está errada pois $\frac{3}{4}$ nunca é inferior a $\frac{1}{4}$.
- A segunda e quarta alternativas temos que para $x > \frac{3}{4}$ a inequação modular não é satisfeita, por exemplo para $x = 1$ temos $|2 - 4 \cdot 1| = |-2| = 2 > 1$.

17. Os números $a - 4$, $a + 2$, $3a + 1$ nessa ordem estão em progressão geométrica. Determine a razão dessa progressão.

A: $q = 4 \vee q = -1$ B: $q = 3 \vee q = 1$ C: $q = 5 \vee q = 3$ D: $q = \frac{5}{2} \vee q = -\frac{1}{3}$ E: $q = 5 \vee q = n - 1$

Resolução: Sendo $a - 4$, $a + 2$, $3a + 1$ termos consecutivos de uma progressão geométrica então $q = \frac{a+2}{a-4} = \frac{3a+1}{a+2}$, assim temos:

$$(a+2)^2 = (a-4)(3a+1) \Rightarrow a^2 + 4a + 4 = 3a^2 - 11a - 4 \Rightarrow 2a^2 - 15a - 8 = 0.$$

$\Delta = (-15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8) = 289$. Então, $a_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{289}}{2 \cdot 2}$, logo $a = 8 \vee a = -\frac{1}{2}$. Determinando a razão, temos:

• para $a = 8$, temos $q = \frac{a+2}{a-4} = \frac{8+2}{8-4} = \frac{5}{2}$; • para $a = -\frac{1}{2}$ temos $q = \frac{a+2}{a-4} = \frac{-\frac{1}{2}+2}{-\frac{1}{2}-4} = -\frac{1}{3}$

A alternativa correcta é **D**.

18. Com 2ℓ de concentrado de manga e 3ℓ de água obtém-se um delicioso sumo de manga. Para obter 50ℓ de sumo são necessários:

A. 10ℓ de concentrado e 40ℓ de água
B. 30ℓ de concentrado e 20ℓ de água
C. 15ℓ de concentrado e 35ℓ de água
D. 20ℓ de concentrado e 30ℓ de água
E. Nenhuma das anteriores

Resolução: Sejam x e y concentrado de manga e água necessária para obter 50ℓ de sumo.

$\left.\begin{array}{l} 2\ell\text{———-}5\ell \\ x\text{———-}50\ell \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{2 \cdot 50}{5} = 20.$ $\left.\begin{array}{l} 3\ell\text{———-}5\ell \\ y\text{———-}50\ell \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{3 \cdot 50}{5} = 30.$

A resposta certa é **D**.

19. Se $2x + y = 70$, o valor de x e y na proporção $\frac{3}{4} = \frac{x}{y}$ é:

A. $x = 30$ e $y = 40$ B. $x = 32$ e $y = 38$ C. $x = 25$ e $y = 45$ D. $x = 18$ e $y = 52$ E. $x = 21$ e $y = 28$

Resolução: Formemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 70 \\ \frac{3}{4} = \frac{x}{y} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + y = 70 \\ x = \frac{3y}{4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2\frac{3y}{4} + y = 70 \\ x = \frac{3y}{4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{5y}{2} = 70 \\ x = \frac{3y}{4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 28 \\ x = \frac{3 \cdot 28}{4} = 21 \end{cases}$$

A resposta certa é alternativa **E**.

- As outras alternativas não satisfazem o sistema formado pelas duas equações.

20. O quinto termo de uma progressão aritmética é igual a 11 e oitavo termo é igual a 17. Calculando a soma dos primeiros dez termos desta progressão aritmética, obtém-se:

A: 116 B: 120 C: 112 D: 122 E: 118

Resolução: O termo geral de uma progressão aritimética é dado por $a_n = a_1 + d(n-1)$ onde a_1 é o primeiro termo e d é a diferença, $d = a_n - a_{n-1}$. Das hipóteses temos:

$$\begin{cases} a_5 = 11 \\ a_8 = 17 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 + 4d = 11 \\ a_1 + 7d = 17 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = 11 - 4d \\ 11 - 4d + 7d = 17 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 3d = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases}$$

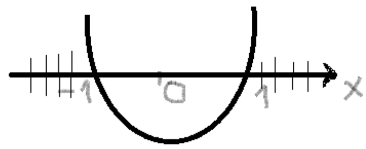
A soma dos primeiros n termos de uma progressão aritimética é dada por $S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$, assim $S_{10} = \frac{(a_1+a_{10})\cdot 10}{2}$ e $a_{10} = a_1 + 9d = 3 + 9\cdot 2 = 21$. Logo, $S_{10} = \frac{(3+21)\cdot 10}{2} = 120$. A resposta certa é **B**.

21. O domínio daa função $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ é :

A: $x \in]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$ B: $x \in [-2, +\infty[$ C: $x \in [2, +\infty[$
D: $x \in]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$ E: $x \in]-\infty, -5[\cup]2, \infty[$

Resolução: Por condição de existência da raíz quadrada, $x^2 - 1 \geq 0$ e o denominador não pode ser zero, i.e., $\sqrt{x^1-1} \neq 0 \Rightarrow x^2 - 1 \neq 0$. Das duas condições conclui-se que $x^2 - 1 > 0$ Assim,

$$x^2 - 1 > 0 \Longrightarrow (x+1)(x-1) > 0$$



Resolvemos graficamente esta inequação temos o gráfico ao lado. A solução é dada pela parte do eixo dos X, a tracejada i.e., $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Deste modo, a resposta cerrecta é **D**.

22. A função inversa da função $f(x) = 1 - \log_2 x$ é:

A: $f^{-1}(x) = 2^{1+x}$ B: $f^{-1}(x) = 2^{1-x}$ C: $f^{-1}(x) = 2^{x-3}$ D: $f^{-1}(x) = \log_2(1-x)$ E: $f^{-1}(x) = 3^{1-x}$

Resolução: De facto esta função admite inversa, visto que é injectiva i.e., $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$. Verifiquemos isso: $1 - \log_2 x_1 = 1 - \log_2 x_2 \Longleftrightarrow \log_2 x_1 = \log_2 x_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2$. Por outro lado ela é sobrejectiva visto que $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x : y = 1 - \log_2 x \Longrightarrow \log_2 x = 1 - y \Longrightarrow x = 2^{1-y}$. Isso mostra que $f(x) = 1 - \log_2 x$ é bijectiva, admitindo assim a função inversa. Para achar a inversa, troquemos os papeis de x e y, i.e.,

$$x = 1 - \log_2 y \Longrightarrow y = 2^{1-x} \Longrightarrow f^{-1}(x) = 2^{1-x}.$$

Esta última é a função inversa desejada, i.e., $f^{-1}(x) = 2^{1-x}$. O que nos leva a concluir que a resposta certa é alternativa é **B**.

23. A função $f(x) = \sqrt{-1 - \dfrac{3}{x}}$ está definida sobre o conjunto:

A: $\emptyset$ B: $[0, +\infty[$ C: $]-\infty, 3]$ D: $[-3, 0[$ E: $[-3, +\infty[$

Resolução: Para a existência da raiz de índece par (nexte caso 2) o argumento deve ser não negativo e no caso concreto temos: $-1 - \dfrac{3}{x} \geq 0 \wedge x \neq 0 \Longrightarrow -\dfrac{3}{x} \geq 1 \wedge x \neq 0 \Longrightarrow -3 \geq x$. O que quer dizer que $x \in]-\infty, -3]$. Por outro lado o denominadir envolvido nessa função não deve ser nulo, i.e., $x \neq 0$. Então, nenhuma das alternativas apresentadas é certa.

24. A recta tangente ao gráfico da função $f(x) = (2x+1)e^{-x}$ no seu ponto de intersecção com o eixo Oy faz com o eixo Ox o ângulo igual a:

A: 0^o B: 30^o C: 90^o D: 45^o E: 60^o

Resolução: No seu ponto de intersecção com o eixo Ox, $x = 0$. O coeficiente angular da recta tangente ao gráfico de uma função num ponto, corresponde a primeira derivada desta função nesse ponto, i.e., Se a equação da tangente no ponto x_0 é $y = ax + b$, temos que $a = f'(x_0)$. Achando a derivada da função dada temos:

$$f'(x) = 2e^{-x} - (2x+1)e^{-x} = (1-2x)e^{-x} \Longrightarrow f'(0) = 1.$$

O ângulo cujo tangente é 1 é igual a 45^o. A resposta é alternativa **D**.

25. A assímptotas verticais da função $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+x-2}$ são:

A: $x = -2 \vee x = 1$ B: $x = 2 \vee x = -1$ C: $x = 2 \vee x = 1$
D: $x = 1$ E: $x = -2 \vee x = -1$

Resolução: As potenciais assímptotas verticais são os pontos que anulam o denominador i.e., os pontos para os quais $x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Longrightarrow x = -2 \vee x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-4}{x^2+x-2} = \frac{-3}{0^-} = +\infty,$$

Logo $x = 1$ é assímptota vertical.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2^-} f(x) &= \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-4}{x^2+x-2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} \\
&= \lim_{x\to -2^-} \frac{x-2}{x-1} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}, \\
\lim_{x\to -2^+} f(x) &= \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2-4}{x^2+x-2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} \\
&= \lim_{x\to -2^+} \frac{x-2}{x-1} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Todos os limites laterais são finitos e iguais. Logo, $x = -2$ não é assímptota vertical. Apenas $x = 1$ é assímptota vertical. A resposta certa é alternativa **D**.

- Vimos que $x = -2$ não é assímptota vertical, daí que as alternativas A e E não são correctas.
- $X = 2$ não anula o denominador ou ainda, não ponto de descontinuidade, portanto não pode ser assímptota vertical, o que faz com que as alternativas C e E não correctas.

26. Considere a sucessão definida por $v_n = -4 + \dfrac{1}{n^3+n+1}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A: (v_n) é um infinitamente grande positivo
B: (v_n) é infinitésimo

C: (v_n) tende para -4

D: (v_n) é um infinitamente grande negativo

E: Nenhuma das alternativas anteriores

Resolução: Calculando o limite de (v_n) temos:

$$\lim_{\to\infty} v_n = \lim_{\to\infty}\left(-4 + \frac{1}{n^3+n+1}\right) = \lim_{\to\infty}\left(-4 + \frac{1}{n^3(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2})}\right) = \lim_{\to\infty}\left(-4 + \frac{1}{n^3}\right) = -4 + 0 = -4.$$

A resposta certa é alternativa **C**.

- Visto que (v_n) é uma sucessão convergente, ela não pode ser infinitamente grande, por isso as alternativas **A** e **D** não são correctas.

27. Da função f definida por $f(x)=\begin{cases} 5x-3, & \text{se } x>1 \\ 2, & \text{se } x=1 \\ 1-\alpha x, & \text{se} x<1 \end{cases}$, determinar $\alpha \in \mathbb{R}$ para que exista o $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

A: 10 B: -1 C: 5 D: -5 E: 0

Resolução: É condição suficiente para que o limite de uma função num ponto exista, que os limites laterais sejam iguais. Para tal, temos que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ e

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(1-\alpha x) = 1-\alpha \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(5x-3) = 2 \end{cases} \Longrightarrow 1-\alpha = 2 \Longrightarrow \alpha = -1.$$ A resposta certa é **B**.

28. É correcto afirmar que:

A: $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{|x-1|} = 1$ B: $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{|x-1|} = -1$ C: $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{|x-1|} = 0$

D: $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{|x-1|} = -\infty$ E: $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{|x-1|} = 2$.

Resolução: Visto que $|x-1| = -(x-1)$ à esquerda de $x=1$, então $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{|x-1|} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{-(x-1)} = -1$. A resposta certa é altenativa **B**.

29. Para que valores de p, a função $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{se } x\le 1 \\ 3-px^2, & \text{se } x>1 \end{cases}$, é contínua no ponto $x=1$?

A: $p=1$ B: $p=-1$ C: $p=4$ D: $p=5$ E: $p=-5$

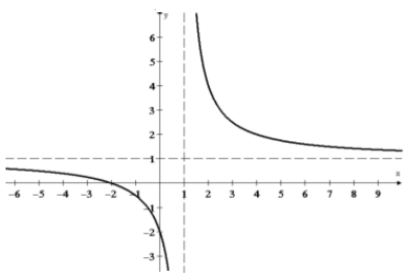
Resolução: Para que $f(x)$ seja contínua em $x=1$ é necessáriamente suficiene que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1).$$

Então,

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x+1) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(3-px^2) = 3-p \\ f(1) = 3-p \end{cases} \Longrightarrow 3-p = 2 \Longrightarrow p = 1.$$ A resposta certa é **A**.

30. A expressão que representa o gráfico $y = f(x)$ da figura ao lado é:



A: $\frac{x+2}{x-1}$ B: $\frac{x-2}{x-1}$ C: $\frac{x}{x-1}$ D: $\frac{x}{x+1}$ E: $\frac{x+2}{x+1}$

Resolução: Olhando para o gráfico vemos que $y = 1$ é assímptota horizontal, $x = 1$ é assímptota vertical, $x = -2$ é zero da função e apenas a função $y = \frac{x+2}{x-1}$ possui essas características, pois

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{0^+} = +\infty \Longrightarrow x = 1 \text{ é assimptota vertical}$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1 \Longrightarrow y = 1 \text{ é assímptota horizontar}$$
$$\frac{x+2}{x-1} = 0 \Longleftrightarrow x = -2 \Longrightarrow x = -2 \text{ é zero de } f(x)$$

Logo, a resposta cetra é alternativa **A**.

31. No gráfico ao lado o $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)}$ é:

A: -2 B: 1 C: 0 D: $-\infty$ E: 2

Resolução: Calculando esse limite temos:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x+2} = 1.$$ Logo, a resposta cetra é **B**.

32. Resolvendo $|2 + \log_3 x| \geq 5$, a solução é:

A: $]0,3]\cup[5,+\infty[$ B: $]1,2]\cup[4,+\infty[$ C: $]0,3^{-7}[\cup[27,+\infty[$ D: $]0,3^{-7}]\cup[27,+\infty[$ E: $]-\infty,2]\cup[27,+\infty[$

Resolução: Tendo em conta as condições de existência de logaritmo, temos $x > 0$. Definindo esta inequação modular, temos:

$$\left\{\begin{array}{c} 2+\log_3 x \geq 5 \\ \vee \\ 2+\log_3 x \leq -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \log_3 x \geq 3 \\ \vee \\ \log_3 x \leq -7 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \log_3 x \geq \log_3 3^3 \\ \vee \\ \log_3 x \leq \log_3 3^{-7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x \geq 27 \\ \vee \\ x \leq 3^{-7} \end{array}\right.$$

Visto que $x > 0$, então $x \in]0,3^{-7}] \cup [27,+\infty[$. Portanto, a resposta certa é alternativa **D**.

33. A equaçao da recta que passa pelo ponto $A(2,3)$ e é paralela à recta de equação $2x - 6y + 1 = 0$ é:

A: $x + 2y = 1$ B: $3x - y + 5 = 0$ C: $x - 3y + 7 = 0$ D: $-x + 2y + 7 = 0$ E: $3x + y + 7 = 0$

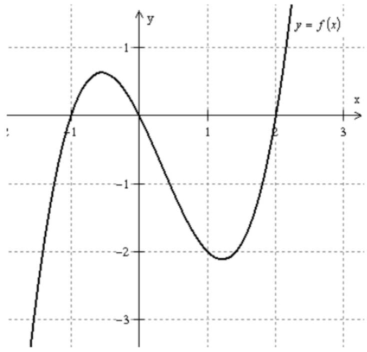
Resolução: A recta $2x - 6y + 1 = 0$ pode ser escrita na forma $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$, cujo declive é $a = \frac{1}{2}$. Visto que a recta desejada é paralela à dada, então elas tem o mesmo declive, $a = \frac{1}{3}$. A recta que passa por um ponto $A(x_0, y_0)$ é dada por $y - y_0 = a(x - x_0)$. Então a recta pretendida terá a forma

$$y - 3 = \frac{1}{3}(x-2) \Longrightarrow 3y - 9 = x - 2 \Longrightarrow -x + 3y - 7 = 0 \Rightarrow x - 3y + 7 = 0.$$

A resposta certa é **C**.

- As outras alternativas não estão correctas, pois o ponto $A(2,3)$ não satisfaz nenhuma das equações.

Em relação ao gráfico ao lado, responda as questões 34,35,36 e 37.



34. O valor de $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{1}{f(x)}$ é:

A: 0 B: $+\infty$ C: -2 D: $-\infty$ E: 2

Resolução: Quando $x \to 2^-$, $f(x) \to 0^-$, então $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$. Logo, a resposta certa é a alternativa **D**.

35. O valor de $X = f(1) + f\left(\dfrac{-1}{2}\right)$ é:

A: $X = \frac{3}{2}$ B: $X = 0$ C: $X < -1$ D: $X = -2$ E: $X = -1$

Resolução: Fazendo a leitura do gráfico, temos $f(1) = -2$ e $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Logo, $X = f(1) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 + f\left(-\frac{1}{2}\right) < -2 + 1 = -1$. A resposta certa é **C**.

36. $y = f'(x)$ para $-\infty < x < -1$ é:

A: 0 B: Não existe C: Negativa D: $-\infty$ E: Positiva

Resolução: No intervalo $-\infty < x < -1$, função $f(x)$ é crescente, portanto a sua derivada nesse intervalo é positiva. Logo, a resposta certa é alternativa **E**.

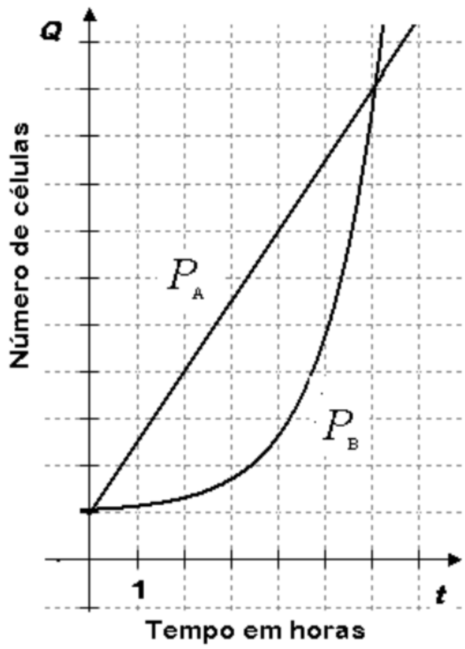
37. Considere a função $y = f(x)$ no intervalo $0 < x < 2$. É FALSO afirmar que neste intervalo:

A: $f(x)$ não é crescente B: $f(x)$ não é decrescente C: $f(x)$ é limitada
D: $f\left(\frac{1}{2}\right) > f(1)$ E: $\forall\, x_0 \,:\, f'(x_0) \neq 0$

Resolução: Fazendo leitura do gráfico vemos que para $x_0 = 1$, $f(x_0) = -2$ é um mínimo local para $f(x)$ e a recta tangente neste ponto é paralela ao eixo Ox, o que significa que a recta tangente a curva de $f(x)$ neste ponto tem declive igual a zero, i.e., $f'(1) = 0$, o que contradiz a afirmação em **E** que diz que $\forall\, x_0 \,:\, f'(x_0) \neq 0$. O que quer dizer que a resposta certa é **E**.

- Note que em algum momento a função é crescente em outro é decrescente, o que faz com que as alternativas A e B sejam verdadeiras;
- a função dada é contínua num itervalo finito, logo ela é limitada nesse intervalo, isso faz com que a alterna C seja verdadeira
- $f(\frac{1}{2}) = -1 > f(1) = -2$, logo a alternativa D é verdadeira.

Em microbiologia crescimento geralmente é o aumento do número de células por unidade de tempo. Na figura estão representados os gráficos de crescimento de duas populações P_A e P_B. As questões 38, 39, 40, 41 são refentes aos gráficos.



38. De entre as alternativas abaixo apenas uma delas é falsa. Indique qual:

    A. Em dois momentos o número de células das duas populações é o mesmo.

    B. A taxa de crescimento de P_B é lenta no início e posteriormente acelerada.

    C. Na terceira hora a população A é superior à população B.

    D. Para unidades de tempo iguais a taxa de variação da população A é a mesma.

    E. Num dado momento a taxa de variação da população B é igual a zero.

    Rsolução: A afirmação falsa é **E**, visto que a taxa de variação corresponde a derivada da função, neste caso da função P_B. Visto que o gráfico da populaçã B é estritamente crescente, então a sua taxa de variação é positiva.

39. No início de um processo o número de células de ambas as populações é de 120. A equação que expressa o número de células da população A é:

    A: $Q(t) = 180t + 120$ B: $Q(t) = 120t + 120$ C: $Q(t) = \frac{1}{180}t + 120$
    D: $Q(t) = \frac{1}{120}t + 120$ E: Nenhuma das anteriores

    Resolução: O número de celulas da população A no tempo inicial é 120, i.e., $(0, Q(0)) = (0, 120)$ e no tempo $t = 6$, $Q(6) = 10 \cdot 120 = 1200$, i.e., $(6, Q(6)) = (6, 1200)$. O seu gráfico é uma recta e a sua equação é dada por $Q(t) - Q(0) = k(t - 0)$, onde,

    $$k = \frac{Q(6) - Q(0)}{6 - 0} = \frac{1200 - 120}{6} = 180.$$

    Então, $Q(t) = 180t + 120$. Logo, a resposta certa é alternativa **A**.

40. O número de celulas das duas populações são iguais:

    A. Seis horas após o início do processo

B. Uma vez durante o processo

C. No fim do processo

D. No início do processo

E. São verdadeiras as afirmações A. e D.

Resolução: As duas populações são iguais nos tempos em que os gráficos se cruzam, i.e., em $t = 0$ e $t = 6$. Logo, a alternativa certa é **E**.

41. Considere as funções $f(x)$ e $g(x)$ que expressa o crescimento das populações P_A e P_B, respectivamente. O valor de $f(2) + g(5)$ é:

A: 840 B: 1080 C: 1200 D: 600 E: 960

Resolução : Do número anterior $f(x) = Q(x) = 180x + 120 \Longrightarrow f(2) = 180 \cdot 2 + 120 = 480$ e $g(5) = 120 \cdot 5 = 600$. Então, $f(2) + g(2) = 480 + 600 = 1080$. Logo, a resposta certa é alternativa **B**.

42. A equação $\sqrt{5-x} \cdot \sqrt{5+x} = -2x$ têm raíz(es).

A: $-\sqrt{5}$ B: -5 C: $\sqrt{5}$ D: $\emptyset$ E: $\pm\sqrt{5}$

Resolução : Para a existência das raíses quadradas e dado que raíz quadrada de um número nunca é negativo, então $5 - x \geq 0 \wedge 5 + x \geq 0 \wedge x \leq 0 \Longrightarrow -5 \leq x \leq 0$. Resolvendo a equação, temos:

$$\sqrt{5-x} \cdot \sqrt{5+x} = -2x \Longrightarrow \sqrt{25-x^2} = -2x \Longrightarrow |25 - x^2| = 4x^2 \Longrightarrow$$
$$25 - x^2 = 4x^2 \wedge 25 - x^2 = -4x^2 \Longrightarrow 5x^2 = 25 \wedge 3x^2 = -25$$

A equação $3x^2 = -25$ não raízes reais. Resolvendo a equação $5x^2 = 25$, temos $x = \pm\sqrt{5}$. Do domínio de existência da raíz quadrada, temos que apenas $-\sqrt{5} \in [-5, 0]$. Logo, a resposta certa é **A**.

43. O conjunto de soluções da inequação $\dfrac{\sqrt{3-x}}{(1-x)(2-x)^2} \leq 0$ é:

A: $]-\infty, 1]$ B: $]1, 3]$ C: $]1, 2[\cup]2, 3]$ D: $\emptyset$ E: $]1, 2[$

Resolução : Para que a expressão tenha sentido, $3-x \geq 0 \wedge 1-x \neq 0 \wedge 2-x \neq 0 \Longrightarrow x \in]-\infty, 3] \backslash \{1, 2\}$. Resolvendo a inequação, temos:

	$]-\infty, 1[$	1	$]1, 2[$	2	$]2, 3[$	3
$\sqrt{3-x}$	+	+	+	+	+	0
$1-x$	+	0	−	−	−	−
$(2-x)^2$	+	+	+	0	+	+
$(1-x)(2-x)^2$	+	0	−	0	−	−
$\frac{\sqrt{3-x}}{(1-x)(2-x)^2}$	+	$\nexists$	−	$\nexists$	−	0

$x \in]1, 2[\cup]2, 3]$. A resposta certa é **C**.

- A alternativa A não está certa pois por exemplo para $x = 1$, a expressão não tem sentido em $\mathbb{R}$. Do mesmo modo, a alternativa B contém valores de x para os quais a equação/expresão não se verifica/tem sentido em $\mathbb{R}$, por exemplo $x = 2$.
- A alternativa D não é correcta pois existe x que verifica a equação dada, por exemplo $x = 3$. O que quer dizer que a solução não é um conjunto vazio.

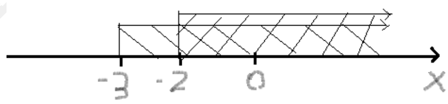
- Alínea E simplesmente está incompleta, pois os valores do intervalo $]2,3]$ fazem parte da solução.

44. O conjunto solução da inequação $2^{x^2+12} \cdot 5^{x^2+12} \geq 0,0001 \cdot \left(10^{2-x}\right)^5$ é:

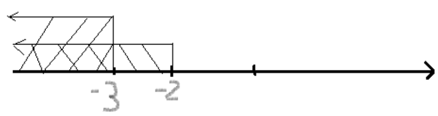
    A: $]-\infty,-3]$ B: $]-2,+\infty]$ C: $]-3,-2[$ D: $\emptyset$ E: $]-\infty,-3[\cup[-2,+\infty[$

    Resolução : Usando as propriedades de produto de potências $a^x \cdot b^x = (a\cdot b)^x$, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ e $(a^x)^y = a^{xy}$ temos:

$$\begin{aligned}
&10^{x^2+12} \cdot 5^{x^2+12} \geq 0,0001 \cdot \left(10^{2-x}\right)^5 \Longleftrightarrow 10^{x^2+12} \geq 10^{-4} \cdot 10^{5(2-x)} \\
&\Longleftrightarrow 10^{x^2+12} \geq 10^{5(2-x)-4} \Longleftrightarrow x^2+12 \geq 5(2-x)-4 \\
&\Longleftrightarrow x^2+5x+6 \geq 0 \Longleftrightarrow (x+3)(x+2) \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow (x+3 \geq 0 \wedge x+2 \geq 0) \vee (x+3 \leq 0 \wedge x+2 \leq 0) \\
&\Longleftrightarrow (x \geq -3 \wedge x \geq 2) \vee (x \leq -3 \wedge x \leq 2)
\end{aligned}$$



Do gráfico ao lado a solução de $x \geq -3 \wedge x \geq 2$ é $x \in [-2,+\infty[$
Do gráfico ao lado a solução de $x \leq -3 \wedge x \leq 2$ é $]-\infty,-3]$



Combinando as duas soluções temos $x \in]-\infty,-3] \cup [-2,+\infty[$. Assim, a resposta certa é **E**.

45. A solução da equação lograrítmica $\log_3 x + \dfrac{1}{\log_3 x - 3} = 5$ é:

    A: $x = 27$ B: $x = 243$ C: $x = 9$ D: $x = 81$ E: $x = 729$

    Resolução : Para que a expressão tenha sentido $x > 0 \wedge \log_3 x - 3 \neq 0 \Longrightarrow x > 0 \wedge \log_3 x \neq \log_3 27 \Longrightarrow x > 0 \wedge x \neq 27$. Seja $\log_3 x = y$, então obtemos a seguinte equação:

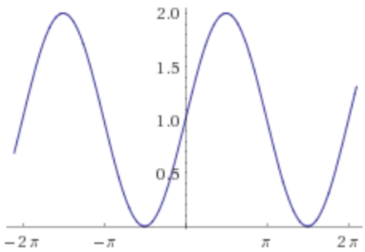
$$y + \frac{1}{y-3} = 5 \Longleftrightarrow y(y-3) = 5(y-3) \Longleftrightarrow y^2 - 8y + 15 = 0 \Longleftrightarrow (y-3)(y-5) = 0 \Longleftrightarrow y = 3 \vee y = 5$$

Visto que $y = \log_3 x$, então

$$\begin{aligned}
&\text{para } y = 3 \Longrightarrow \log_3 x = 3 \Longrightarrow x = 27 \\
&\text{para } y = 5 \Longrightarrow \log_3 x = 5\log_3 3 \Longrightarrow x = 3^5 = 243.
\end{aligned}$$

Dado que $x = 27$ é rejeitado no domínio de existência da expressão, então a solução é $x = 243$. Desta forma, a resposta certa é **B**.

46. A expressão analítica da função representada na figura ao lado é:
A: $f(x) = senx$ B: $f(x) = \cos x$ C: $f(x) = 2senx+1$
D: $f(x) = senx + 1$ E: $f(x) = 2\cos x + 1$



Resolução : Temos: A função dada na figura possui as seguintes características:

$$f\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \text{ e é máximo local}$$
$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \text{ e é mínimo local}$$
$$f'\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0,$$

é a função $f(x) = senx + 1$. O que quer dizer que a resposta certa é **D**.

47. Sendo $f(x) = x + 2$ e $g(x) = 2x + 5$, a função composta $gof(x)$ no ponto $x = -4$ será igual é:
A: $gof(-4) = 5$ B: $gof(-4) = 4$ C: $gof(-4) = 1$
D: $gof(-4) = -1$ E: $gof(-4) = 7$

Resolução : $gof(x) = g[f(x)] = 2(x + 2) + 5 = 2x + 9$, então $gof(-4) = 2 \cdot (-4) + 9 = 1$.
Assim, a resposta certa é **C**.

48. Uma função real de variável x é tal que $f(0) = 1$. Indique qual das seguintes expressões pode definir a função f :
A: $\frac{x+5}{x-1}$ B: $\frac{\lg x}{x+1}$ C: $sen(7x + \frac{\pi}{4})$ D: 5^{tgx} E: $\frac{x+1}{x-1}$

Solução: A única expressão que quando x for zero é igual a um é 5^{tgx}. Então, a resposta certa é alternativa **D**. As outras alternativas simplesmente não satisfazem a condição dada.

49. Calculando a derivada da função $f(x) = \dfrac{-6}{(x-2)^2}$ qual delas é correcta?

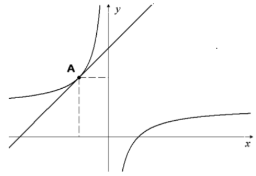
A: $f'(x) = \dfrac{12}{(x-1)^3}$ B: $f'(x) = \dfrac{-6x}{(x-1)^4}$ C: $f'(x) = \dfrac{12}{(x-1)^4}$
D: $f'(x) = \dfrac{6}{(x-1)^3}$ E: $f'(x) = \dfrac{18}{(x-1)^3}$

Resolução: Calculando a derivada da função dada temos:

$$f'(x) = \left[-6 \cdot (x-1)^{-2}\right]' = 12(x-1)^{-3} = \frac{12}{(x-1)^3}.$$

Into quer dizer que a alternativa certa é **A**.

50. Na figura estão representados os grários da função $f(x) = \frac{x-1}{x}$ e da recta $y = x + 3$. As coordenadas do ponto A são:
A: $(-2, 1)$ B: $(-1, 2)$ C: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$
D: $-\frac{1}{3}, 4$ E: $(-\frac{1}{4}, 5)$

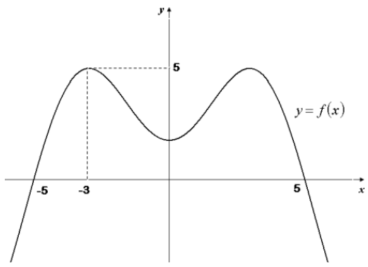


Resolução: No ponto A as duas funções são iguais, i.e., $\dfrac{x-1}{x} = x+3$. Vamos resolver esta equaçáso. Para a sua existência, $x \neq 0$.

$$\frac{x-1}{x} = x+3 \iff x-1 = x(x+3) \iff x^2+2x+1=0 \iff (x+1)^2=0 \iff x=-1.$$

Subistituindo $x=-1$ na rectatemos é $y=-1+3=2$. Então as coorenadas do ponto A são $(-1,2)$. Logo, a opção certa é **B**.

Considere o gráfico da função $y=\frac{1}{f(x)}$ ao lado responda as questões 51, 52, 53 e 54.



51. O domínio da função $y=\frac{1}{f(x)}$ é:

A: $]-5;5[$ B: $]2,+\infty]$ C: $]-\infty;-5[\cup]5;+\infty[$ D: $\mathbb{R}\setminus\{-5,5\}$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução: Para que $y=\frac{1}{f(x)}$ tenha sentido em $\mathbb{R}$, $f(x)$ deve ter sentido e $f(x)\neq 0$. Fazendo leitura ao gráfico de $f(x)$, ela tem sentido para todo $x\in\mathbb{R}$. Então $\frac{1}{f(x)}$ deixará de ter sentido apenas quando $f(x)$ é nulo e isso acontece para $x=\pm5$. Logo, $D_y=\mathbb{R}\setminus\{-5,5\}$. A alternativa certa é **A**.

52. A função $y=f(x)$ é:

A. Monótona crescente B. Ímpar C. Par D. Monótona decrescente E. Limitada

Resolução: Pelo gráfico, vemos que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(-x)=f(x)$, então ela é par. Logo, a alternativa certa é **C**.

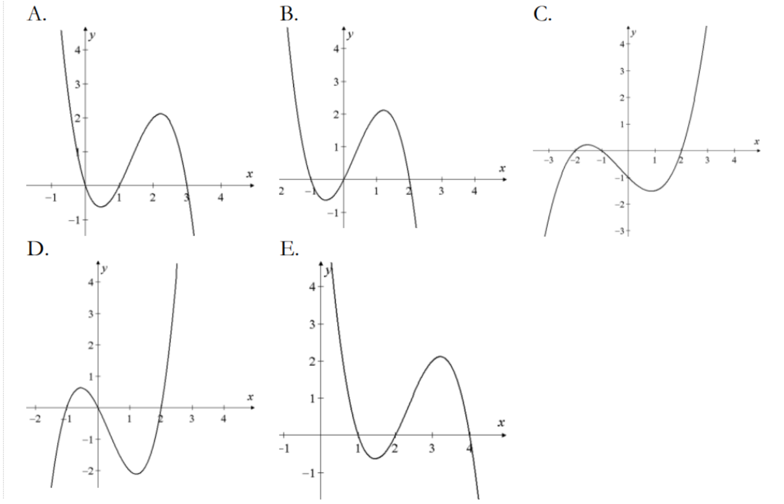
53. É falso afirmar que:
A. A derivada da função $y=f(x)$ tem um zero no intervalo $]-5;0[$
B. A função $y=f(x)$ tem um ponto de inflexão no intervalo $]-3;0[$
C. $f'(-3)=0$
D. $f[f(-3)]=0$
E. O coeficiente angular da recta tangente à curva no ponto $x=0$ é 2.

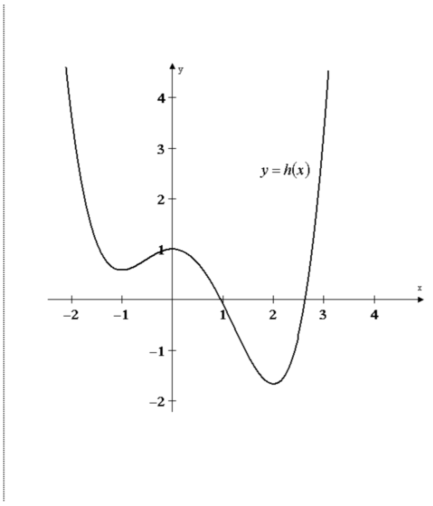
Resolução: É falso afirmar que essa função tem uma recta tangente no ponto $x=0$ com coeficiente angular 2, pois a derivada da função deste ponto anula-se, visto que ela atinge um mínimo local nesse ponto. A alternativa certa é **E**.

54. O contradomínio de $f(x)-2$ é:
A: $]-\infty;7[$ B: $]-\infty,3[$ C: $]-\infty;3]$ D: $]-\infty;0[$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução: Pela leitura do gráfico temos que o contradomínio de $f(x)$ é $]-\infty;5]$, então subtraindo 2, i.e., $f(x)-2$ temos $]-\infty;3]$, que é alternativa **B**.

55. Qual dos gráficos abaixo representa a função derivada de $y = h(x)$ ao lado?





Resolução: Fazendo análise do gráfico de $y = h(x)$ ao lado temos:

x	$]-\infty;-1[$	-1	$]-1;0[$	0	$]0;1[$	1	$]1;2[$	2	$]2;+\infty[$
$h(x)$	$\searrow$	$--$	$\nearrow$	$--$	$\searrow$	0	$\searrow$	$--$	$\nearrow$
h'(x)	$-$	0	$+$	0	$-$	$--$	$-$	0	$+$

A única função que satisfaz o comportamento descrito na linha de $h'(x)$ na tabela é o gráfico da alternativa **D**.

56. Que valores pode tomar m se $sen\, x = \frac{m-1}{2}$:

A: $m > 1$ B: $-1 < m \leq 3$ C: $-1 < m < 3$ D: $-1 \leq m < 3$ E: $-1 \leq m \leq 3$

Resolução: Sabes-se que $-1 \leq sen\, x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{m-1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m-1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3$. A resposta certa é alternativa **E**.

Exame de Matemática de 2016

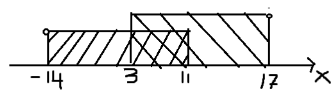
Correcção do exame de Matemática de 2016

1. Dados os conjuntos numéricos em $\mathbb{R}$, onde $A =]-14, 11]$ e $B = \{x : 3 \leq x \leq 17\}$ e o conjunto universo $U =]-18, 18]$. O conjunto complementar da reunião de A com B é dado por:

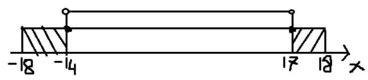
   A: $\overline{A \cup B} =]-18, -14] \cup [17, 18]$
   B: $\overline{A \cup B} =]-18, 18]$
   C: $\overline{A \cup B} = \emptyset$
   D: $\overline{A \cup B} =]-18, -14] \cup]17, 18]$
   E: $\overline{A \cup B} = [-18, 18]$

   Resolução: Representando os conjuntos na recta real temos:

   A reunião de A e B é toda parte à tracejado no gráfico ao lado, i.e., $A \cup B =]-14, 17[$.



   O complementar deste conjunto é o conjunto indicado pela parte à tracejada no gráfico ao lado, i.e.,
   $\overline{A \cup B} =]-18, -14] \cup [17, 18]$



   Então, a resposta certa é a alternativa **A**.

2. Simplificando a expressão $\sqrt{(\sqrt{59} - \sqrt{34})(\sqrt{59} + \sqrt{34})}$ obtém-se:

   A: 4 B: 6 C: 12 D: 17 E: 5

   Resolução: Usando a diferença de quadrados $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, temos

$$\begin{aligned}\sqrt{(\sqrt{59} - \sqrt{34})(\sqrt{59} + \sqrt{34})} &= \sqrt{\left(\sqrt{59}\right)^2 - \left(\sqrt{34}\right)^2} \\ &= \sqrt{59 - 34} = \sqrt{25} = 5.\end{aligned}$$

   Então, a resposta certa é a alternativa **D**.

3. QUESTÃO ANULADA!

4. A negação da proposição $\forall x \in \mathbb{R}, |x| > 1$ é:

   A: $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq 1$ B: $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1$ C: $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \neq 1$
   D: $\exists x \in \mathbb{R}, |x| \leq 1$ E: Nenhuma das anteriores

   Resolução: O quantificador $\forall$ é universal e a sua negação resulta num quantificador existencial $\exists$. Sendo a propesição "para qualquer número real x verifica-se que $|x| > 1$" a sua negação seria "existe pelo menos um número real que não satisfaça a desigualdade $|x| > 1$" ou simplesmente, "existe pelo menos um número real x tal que $|x| \leq 1$" e escrevendo isto em simbologia matemática temos $\exists\, x \in \mathbb{R}, |x| \leq 1$. Logo, a alternativa certa é **D**.

5. Sejam dados os números $a = 1,2$ $b = \sqrt{2,25}$ e $c = \frac{615}{500}$. Qual das afirmações é correcta?

   A: $c < b < a$ B: $c > a > b$ C: $b > c > a$
   D: $c < a < b$ E: Nenhuma das anteriores

   Resolução: Note que

$$b = \sqrt{2,25} = \sqrt{225 \cdot 10^{-2}} = 10^{-1} \cdot \sqrt{15^2} = 15 \cdot 10^{-1} = 1,5$$
$$c = \frac{615}{500} = \frac{5 \cdot 123}{5 \cdot 10^2} = 123 \cdot 10^{-2} = 1,23$$

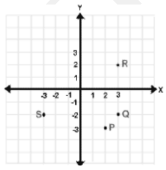
   Claramente vemos que $1,2 < 1,23 < 1,5$ i.e., $a < c < b$. Logo, a resposta certa é a alternativa **C**.

6. O valor $\sqrt{\frac{25}{4} - 4}$ é igual à:

   A: $\frac{1}{2}$ B: 0 e $\frac{5}{2}$ C: $\frac{3}{4}$ D: $\frac{3}{2}$ E: $\frac{9}{4}$

   Resolução: Temos: $\sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \sqrt{\frac{25 - 4 \cdot 4}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$. Então, a resposta certa é a alternativa **D**.

7. Se $x = -3$ e $y = 2$, do gráfico abaixo, o ponto que representa a localização $(-x, -y)$ é:



   A: P B: Q C: R D: S E: Origem do sistema cartesiano

   Resolução: Visto que $(x, y) = (-3, 2) \Rightarrow (-x, -y) = (3, -2)$, o que corresponde ao ponto Q. Portanto, a resposta certa é a alternativa **B**.

8. O gráfico de uma função par definida num intervalo fechado $[-a, a]$ de um sistema de coordenadas cartesianas é:
   A. simétrico em relação ao eixo das abcissas
   B. simétrico em relação ao eixo das ordenadas
   C. simétrico em relação a uma recta diferente do eixo das ordenadas
   D. simétrico em relação à origem do sistema de coordenadas
   E. Nenhuma das alternativas anteriores

   Resolução: Uma função definida num intervalo simétrico $[-a, a]$ é par se $\forall\, x \in [-a, a]$, $f(-x) = f(x)$. Então o seu gráfico será simétrico em relação ao eixo das ordenadas. Assim, a resposta certa é **B**.

9. Qual é o domínio da expresão $\frac{x+1}{x^2-1}$?

   A: $x \in \mathbb{R}$ B: $x \in [0, +\infty]$ C: $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$
   D: $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ E: $x \in [-1, 1]$

   Resolução : Para a existência da expressão $\frac{x+1}{x^2-1}$ o denominador deve ser diferente de zero, i.e., $x^2 - 1 \neq 0 \Longrightarrow x^2 \neq 1 \Longrightarrow x \neq \pm 1$. Logo, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$. Logo, a resposta certa é **C**.

10. Sejam definidas as funções $f(x) = 3x - 11$ e $f(x) = 3x + 11$. Então os seus gráficos:

    A. Intersectam-se no ponto (0, 11)
    B. Intersectam-se na origem do sistema de coordenadas
    C. são rectas paralelas
    D. são rectas coincidentes
    E. são rectas perpendiculares

    Resolução : As duas funções são rectas com o mesmo declive $m = 3$ e diferem na ordenada na origem (o que faz com que elas não sejam coincidentes). Logo elas são paralelas. Então, a resposta certa é **C**. Se elas se intersectassem, teriamos $3x - 11 = 3x + 11 \Longrightarrow -11 = 11$, o que não faz sentido.

11. Uma mercadoria no valor de MZN $460,00$ sofreu um desconto e teve o seu preço reduzido para MZN $331,20$. A taxa de redução utilizada no desconto é:

    A: 72% B: 18% C: 32% D: 28% E: 15%

    Resolução : Seja α a taxa de redução do valor da mercadoria, então $460 - 460\alpha = 331,2$ $\Rightarrow \alpha = \frac{460-331}{460} = 0,28$, que em percentagem corresponde a 28%. Logo, a resposta certa é **D**.

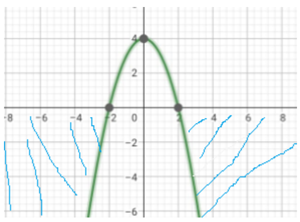
12. A solução da inequação $\dfrac{1}{2-x} + \dfrac{3}{2+x} < 1$ é:

    A: $]-\infty, 2]$ B: $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ C: $]2, +\infty[$ D: $]-\infty, -2[$ E: $\emptyset$

    Reolução : Fazendo *mmc* temos,

$$\frac{1}{2-x} + \frac{3}{2+x} < 1 \Leftrightarrow \frac{2+x+3(2-x)-(2-x)(2+x)}{(2-x)(2+x)} < 0$$
$$\frac{x^2-2x+4}{(2-x)(2+x)} < 0$$

    Para a expressão do numerador temos $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12 < 0$, logo não tem raizes reais e o seu gráfico fica acima do eixo Ox, pois o ceficiente de x^2 é positivo, isto quer dizer que $x^2 - 2x + 4 > 0$ para todos valores de x reais. O sinal da expressão dependeninteiramente do sinal do denominador, i.e., a última expressão é negativa se e somente se $(2-x)(2+x) = -x^2 + 4 < 0$. Resolvendo graficamente, temos:



    Fazendo leitura do gráfico, temos $x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$. Desta forma, a resposta certa é **B**.

13. QUESTÃO ANULADA!

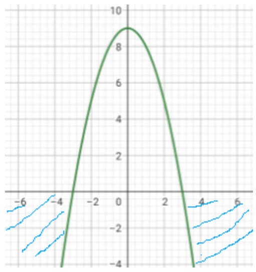
14. Resolva a inequação $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{9-x^2} > 1$ obtém-se:

    A: $]-3, 3[$ B: $]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$ C: $[-3, 3]$
    D: $]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$ E: $]-\infty, -3]\cup]3, +\infty[$

Resolução : Temos,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{9-x^2} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{9-x^2} > \left(\frac{2}{3}\right)^{0} \Leftrightarrow 9-x^2 < 0 \Leftrightarrow (3-x)(3+x) < 0.$$

Resolvendo graficamente esta última inequação temos:



Fazendo leitura do gráfico, temos $x \in]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$. Assim, a altenativa correcta é **B**.

15. Qual das proposições propostas é solução da equação $|x-3| = -3$?

A: $x = 0$ B: $x = 6$ C: $x = -3$ D: $x = \emptyset$ E: $x \in \mathbb{R}$

Resolução : Visto que o módulo de qualquer número nunca é negativo, então a solução da equação dada é $\emptyset$. Então, a resposta certa é **D**.

16. A soma dos primeiros 30 termos da sequência $-11, -10, -9, -8, \ldots$ é igual à:

A: 105 B: 37 C: 150 D: 30 E: 70

Resolução: Note que $-10-(-11) = 1$, $-9-(-10) = -1$, $-8-(-9) = 1, \ldots$ então a sequência é uma progressão aritimética com diferença $d = 1$. O seu termo geral é $a_n = a_1 + (n-1)d = -11 + (n-1)\cdot 1 = n - 12$. Assim, o termo $a_{30} = 30 - 12 = 18$. A soma dos primeiros n termos é dada por

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} \Longrightarrow S_{30} = \frac{(-11+18)\cdot 30}{2} = 7\cdot 15 = 105.$$

Logo, a resposta certa é **A**.

17. Seja a inequação $\sqrt{x+5} < 1 - x$. A sua solução corresponde à:

A: $x \leq -5$ B: $-1 < x < +\infty$ C: $-5 \leq x < -1$ D: $\emptyset$ E: $-\infty < x < +\infty$

Resolução: Para a existência da expressão $x+5 \geq 0 \wedge 1-x > 0 \Longrightarrow -5 \leq x < 1$. Assim,

$$\sqrt{x+5} < 1-x \Leftrightarrow (\sqrt{x+5})^2 < (1-x)^2 \Leftrightarrow x+5 < 1-2x+x^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 3x - 4 > 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-4>0 \wedge x+1>0 \\ \vee \\ x-4<0 \wedge x+1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \wedge x>-1 \\ \vee \\ x<4 \wedge x<-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ \vee \\ x<-1 \end{cases} \Rightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[.$$

Combinando com as condições do domínio da expressão temos: $(x \in]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[) \wedge (x \in]-5, 1[)$, o que resulta em $x \in [-5, -1[$. Logo, a alternativa certa é **C**.

18. Sabendo que $sen(75^o) \approx 0.97$, o valor de $\cos(15^o)$ é aproximadamente:

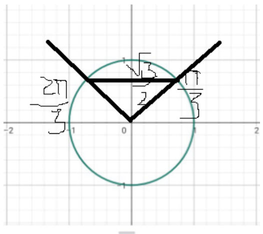
A. 1 B. 0.97 C. 0.03 D. 0.5 E. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolução: É sabido que $\cos\alpha = sen(90^o - \alpha)$ e $15^o = 90^o - 75^o$, logo $\cos 15^\circ = sen(90^\circ - 15^\circ) = sen 75^\circ \approx 0.97$. A resposta certa é **B**.

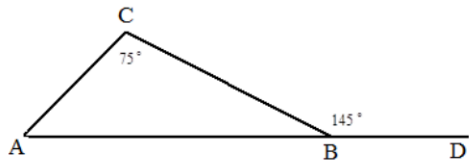
19. A solução da equação $sen(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ no intervalo de $[0, 2\pi]$ é:

A. $x = \frac{\pi}{4}$ B. $x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3}$ C. $x = \frac{5\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3}$ D. $x = \frac{\pi}{2}$ E. $x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$

Resolução: Pelo gráfico ao lado, vemos que equação $sen\, x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ tem como solução $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Para $x \in [0, 2\pi]$, temos $k = 0$, então $x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3}$. Logo, a resposta certa é alternativa **B**.



20. A figura ao lado o mostra um triângulo ABC com o segmento AB prolongado até ao ponto D, o ângulo externo CBD medindo 145^o, e o ângulo C medindo 75^o. A medida do ângulo CAB é:



A: 35^o B: 70^o C: 110^o D: 220^o E: Nenhuma das alternativas anteriores

Resolução: É sabido que $A\hat{B}C + C\hat{B}D = 180^o \Longrightarrow A\hat{B}C = 180^o - 145^o = 35^o$ e por outro lado, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o. Então, $C\hat{A}B + 75^o + A\hat{B}C = 180^o \Longrightarrow C\hat{A}B = 180^o - 110^o = 70^o$. Assim, a resposta certa é **B**.

21. QUESTÃO ANUADA!

22. A solução da equação $\sqrt{(3x-5)^2} = |10 - 2x|$ é:

A: $x \in \left\{\frac{5}{3}, 5\right\}$ B: $]-5, 3[$ C: $]-\infty, -5[\cup]2, +\infty[$ D: $x \in \{-5, 3\}$ E: $\emptyset$

Resolução: Visto que a existência da expressão já está garantida, pois o radicando é não negativo para todo x real, vamos partir para a resolução da equação.

$$\sqrt{(3x-5)^2} = |10 - 2x| \iff |3x - 5| = |10 - 2x|$$

$$\text{se } 10 - 2x \neq 0 \text{ temos: } \left|\frac{3x-5}{10-2x}\right| = 1.$$

Então,

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{3x-5}{10-2x} = 1 \\ \vee \frac{3x-5}{10-2x} = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3x - 5 = 10 - 2x \\ \vee \\ 3x - 5 = -(10 - 2x) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 3 \\ \vee \\ x = -5 \end{array}\right.$$

Se $10 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 5$ e substituindo no primeiro membro, temos $\sqrt{(3 \cdot 5 - 5)^2} = 10 \neq 0$. Logo $x = 5$ não faz parte da solução da equação dada. O que nos leva a concluir que a resposta certa é alternativa é **D**.

23. O domínio de existência da função $f(x) = \ln(|x - 1| - 4)$ é:

A: $x \in \mathbb{R}$ B: $[-3, +\infty[$ C: $]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$ D: $\mathbb{R} \setminus \{-3, 5\}$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução: Para a existência do logarítimo o argumento deve ser positivo i.e., $|x-1|-4 > 0 \Longrightarrow |x-1| > 4 \Longrightarrow x - 1 > 4 \vee x - 1 < -4 \Longrightarrow x > 5 \vee x < -3$. O que quer dixer que $x \in]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$. Então, resposta certa é **C**.

24. As medidas dos lados de um rectângulo ABCD com $AB = 8cm$ e $BC = 5cm$ são aumentadas em 50%. Qual será o aumento percentual da área do segundo rectângulo em comparação com o primeiro?

A: 100% B: 125% C: 150% D: 200% E: 300%

Resolução: Este exercício pode ser resolvido sem necessariamente ter medidas concretas, i.e., seja $AB = c$ (comprimento) e $BC = \ell$ (largura). Se aumentar essas medidas em 50%, temos $c_1 = c + \frac{c}{2} = \frac{3c}{2}$ e $\ell_1 = \ell + \frac{\ell}{2} = \frac{3\ell}{2}$. Sejam A_0 e A_1 as áreas dos rectangulos inicial e final, respectivamente. Então,

$A_0 = c \cdot \ell$
$A_1 = c_1 \cdot \ell_1 = \frac{3}{3}c \cdot \frac{3}{2}\ell = \frac{9}{4}A_0$. .

Assim, a variação da área é $\Delta A = A_1 - A_0 = \frac{9}{4}A_0 - A_0 = \frac{5}{4}A_0$. Enão, a variação percentual é dada por

$$r = \frac{\Delta A}{A_0} \cdot 100\% = \frac{\frac{5}{4}A_0}{A_0} \cdot 100\% = 1,25 \cdot 100\% = 125\%.$$

A resposta é alternativa **B**.

Querendo usar as medidas fornecidas no exercício, temos $c_1 = c + \frac{c}{2} = 8 + \frac{8}{2} = 12$, $\ell_1 = \ell + \frac{\ell}{2} = 5 + \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$. Então,

$A_0 = c \cdot \ell = 8 \cdot 5\,cm^2 = 40\,cm^2,\;\; A_1 = c_1 \cdot \ell_1 = 12 \cdot \frac{15}{2}\,cm^2 = 90\,cm^2.$.

Assim, $\Delta A = A_1 - A_0 = 90\,cm^2 - 40\,cm^2 = 50\,cm^2$. Logo, a variação percentual é dada por

$$r = \frac{\Delta A}{A_0} \cdot 100\% = \frac{50}{40} \cdot 100\% = 1,25 \cdot 100\% = 125\%.$$

25. A solução da inequação $\log_2(x+5) - \log_2(x+2) \geq 1$ é:

A: $x \in]-\infty, -5[\cup]-2, +\infty[$ B: $x \in]-\infty, 2]$ C: $]-2, 1]$ D: $x \in [-5, +\infty[$ E: $x \in]-2, +\infty[$

Resolução: Para a existência da expressão $(x+5 > 0 \wedge x+2 > 0) \Longrightarrow x > -2$. Resolvendo a inequação, temos

$$\log_2(x+5) - \log_2(x+2) \geq 1 \Longleftrightarrow \log_2\left(\frac{x+5}{x+2}\right) \geq \log_2 2 \Longleftrightarrow \frac{x+5}{x+2} \geq 2,$$
$$x + 5 \geq 2(x+2) \Longleftrightarrow x - 1 < 0 \Longleftrightarrow x \leq 1.$$

Combinando com as condições de domínio temos $(x > -2 \wedge x \leq 1) \Longrightarrow x \in]-2, 1]$. A resposta certa é **C**.

26. As coordenadas de pontos de intersecção dos gráficos das funções $y = 2 - 3x$ e $y = 2x^2 + 7x + 14$ são:

A: $(2, 8)$ e $(3, -11)$ B: $(-2, 7)$ e $(7, -4)$ C: $(-1, 5)$ e $(10, 2)$

D: $(-2, 8)$ e $(-3, 11)$ E: $(2, -8)$ e $(7, 4)$

Resolução: A intersecção entre as duas funções acontece quando $2 - 3x = 2x^2 + 7x + 14 \Longrightarrow 2x^2 + 10x + 12 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Longleftrightarrow (x+3)(x+2) = 0 \Longrightarrow x = -2 \vee x = -3$.

Para $x = -2 \Longrightarrow y = 2 - 3 \cdot (-2) = 8 \Longrightarrow (-2, 8)$;
Para $x = -3 \Longrightarrow y = 2 - 3 \cdot (-3) = 11 \Longrightarrow (-3, 11)$.

Assim a resposta certa é alternativa **D**.

As outras alternativas não satisfazem a equação da igualdade das duas funções. Por exemplo, alternativa A, para o ponto $(2, 8)$, $x = 2$ não é solução da equação quadrática obtida.

27. QUESTÃO ANULADA

28. O vértice $V(x,y)$ da parábola definida por $f(x) = x^2 - 8x + 15$ é:

A: $V(0,15)$ B: $V(4,-1)$ C: $V(-4,63)$ D: $V(1,-4)$ E: $V(0,-1)$.

Resolução: Achando os zeros de $f(x)$ temos: $x^2 - 8x + 15 = 0 \Longrightarrow (x-3)(x-5) = 0 \Longrightarrow x_1 = 3 \wedge x_2 = 5$. As coordenadas do vértice são dadas por

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3+5}{2} = 4;$$
$$y_v = f(x_v) = (4)^2 - 8 \cdot 4 + 15 = -1.$$

Logo, o vértice $V(x,y) = V(4,-1)$. Então, a resposta certa é altenativa **B**.

29. O gráfico da função $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ é:

A: simétrico em relação ao eixo das abcissas
B: simétrico em relação ao eixo das abcissas ordenadas
C: simétrico em relação a vertical $x = 2$
D: simétrico em relação a vertical $x = -2$
E: simétrico em relação a origem

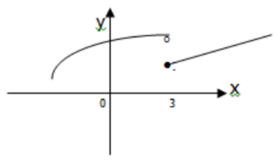
Resolução: Notemos que a função dada é par em qualquer segmento simétrico em $\mathbb{R}$, i.e., $\forall a > 0$, e $\forall\, x \in [-a, a]$, $f(-x) = f(x)$, de facto,

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 - 4} = \frac{1}{x^2 - 4} = f(x).$$

Sendo y uma função par, é simétrica em relação ao eixo das ordenadas. Logo, a resposta certa é alternativa **B**.

30. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$. A afirmação verdadeira é:

A: $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = f(3)$ e $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = f(3)$
B: $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq f(3)$ e $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = f(3)$
C: $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = f(3)$ e $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) \neq f(3)$
D: $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) \neq f(x)$
E: $f(3)$ não existe.



Resolução: Analisando a figura vemos que $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq f(3)$ e $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = f(3)$. Logo, a resposta cetra é alternativa **B**.

31. O limite da expressão $\dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 + x - 2}$ quando $x \to 1$ é:

A: -2 B: 0 C: 1 D: ∞ E: Nenhuma das anteriores

Resolução: Calculando esse limite temos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2)^2 - 5x^2 + 4}{(x+2)(x-1)}$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(x^2-4)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-1)}\\ &= \lim_{x\to 1}(x+1)(x-2) = -2.\end{aligned}$$

Logo, a resposta cetra é alternativa **A**.

32. Para que valor do argumento x a função não é contínua, sendo
$f(x) = \begin{cases} |x^2-1|, & \text{se } x \neq 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$

A: -1 B: 0 C: 2 D: 1 E: Nenhuma das alternativas anteriores

Resolução: Esta função é contínua para todos os valores reais de x, com excepção talvez no ponto $x = 1$. Verifiquemos a continuidade da função neste ponto. Para que ele seja contínua neste ponto, os limites laterais devem ser iguais e iguais ao valor da função no ponto, i.e.,

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a).\\ &\lim_{x\to 1^-}|x^2-1| = \lim_{x\to 1^-}[-(x^2-1)] = 0\\ &\lim_{x\to 1^+}|x^2-1| = \lim_{x\to 1^+}(x^2-1) = 0\\ &f(1) = 1\end{aligned}$$

Vemos que os limites laterais são iguais, mas não iguais ao valor da função no ponto $x = 1$. Logo, em $x = 1$ a função é descontínua (descontinuidade do tipo evitável).

Portanto, a resposta certa é alternativa **D**.

33. Simplificando a expressão $\dfrac{sen\,\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1+\cos\alpha}{sen\,\alpha}$ obtém-se:

A: $\dfrac{2}{sen\alpha}$ B: $\dfrac{sen\alpha}{2}$ C: $\dfrac{\cos^2\alpha}{2}$ D: $\dfrac{2}{\cos\alpha}$ E: 2

Resolução: Vamos simplificar a expressão tendo em conta que $\text{sen}\,\alpha \neq 0$ e $1+\cos\alpha \neq 0$. Temos:

$$\begin{aligned}\frac{\text{sen }\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\text{sen }\alpha} &= \frac{\text{sen }^2\alpha + (1+\cos\alpha)^2}{\text{sen }\alpha(1+\cos\alpha)}\\ &= \frac{\text{sen }^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha + 1}{\text{sen }\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{1+2\cos\alpha+1}{\text{sen }\alpha(1+\cos\alpha)}\\ &= \frac{2+2\cos\alpha}{\text{sen }\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{2(1+\cos\alpha)}{\text{sen }\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{2}{\text{sen }\alpha}.\end{aligned}$$

A resposta certa é **A**.

34. As assímptotas verticais A_v e horizontais A_h da função $f(x) = \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}(x+1)}$ são:

A: $A_v:\ x = \sqrt{2}$ e $x = -1$ e A_h não existe
B: $A_v:\ x = -1$ e $A_h:\ y = 1$
C: $A_v:\ x = \sqrt{2}$ e $x = 1$ e $A_h:\ y = -2$
D: $A_v:\ x = \sqrt{2}$ e $A_h:\ y = \sqrt{2}$
E: $A_v:\ x = \sqrt{2}$ e $A_h:\ y = -\sqrt{2}$

Resolução: Assímptotas verticais estão directamente ligados aos pontos rejeitados no domínio. No nosso caso, para a existência da função dada, $(x-\sqrt{2})(x+1) \neq 0 \Longrightarrow x \neq \sqrt{2} \wedge x \neq -1$. Verifiquemos se essas pontos correspondem a assímptotas ou não.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x) &= \lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}(x+1)} = \lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}(x+1)} \\ &= \lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{x+\sqrt{2}}{x+1} = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Visto que o limite existe e é finito, $x=\sqrt{2}$ não é assímptota vertical.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}(x+1)} = \frac{-1}{(-1-\sqrt{2})\cdot 0^-} = -\infty.$$

Logo, $x=-1$ é A_v. Para obter assímptota horizontal, calculemos os seguintes limites.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}(x+1)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}(x+1)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Então, $y=1$ é A_h. Deste modo, a resposta certa é a alternativa **B**.

35. QUESTÃO ANULADA!

36. A derivada da função $y=\ln(1-\cos x)$ é:

A: $ctg\dfrac{x}{2}$ B: $\dfrac{sen\, x}{1-\cos^2 x}$ C: $\dfrac{-sen\, x}{1-\cos^2 x}$ D: 0 E: $\dfrac{sen\, x}{1-\cos x}$

Resolução: Derivado a função temos:

$$y' = (\ln(1-\cos x))' = \frac{(1-\cos x)'}{1-\cos x} = \frac{-(-senx)}{1-\cos x} = \frac{senx}{1-\cos x}.$$

Logo, a resposta certa é alternativa **E**.

37. As rectas $r_1 = \frac{1}{2}x - 3$ e $r_2 = ax+5$ são perpendiculares se:

A: $a=2$ B: $a=-2$ C: $a=\dfrac{1}{2}$ D: $a=-\dfrac{1}{2}$ E: $a=-3$

Resolução: Duras rectas $r_1 = m_1x+b_1$ e $r_2 = m_2x+b_2$, são perpendiculares se $m_2 = -\frac{1}{m_1}$, então as rectas dada serão perpendiculares se $a=-2$. O que quer dizer que a resposta certa é **A**.

38. O declive da recta tangente à uma curva da função $f(x)$ num ponto $(a, f(a))$ é igual à $1,5$. Então neste ponto a função dada:

A. Tem um máximo. B. Tem um mínimo C. É crescente
D. É decrescente E. Nenhuma das alternativas anteriores

Rsolução: O declive da recta tangente ao gráfico de uma função $f(x)$ num determinado ponto $(a, f(a))$ corresponde ao valor da derivada da função f nesse ponto, i.e., $m=f'(a)$. Sendo essa derivada positiva, isso quer dizer que a função é crescente na vizinhança desse ponto. Logo, a resposta certa é **C**.

39. A função $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3$ tem seu mínimo no ponto

A: $(0, 3)$ B: $(0, -3)$ C: $\left(1, \frac{8}{3}\right)$ D: $\left(-1, \frac{10}{3}\right)$ E: Nenhuma das alternativas anteriores

Resolução: Para que uma função atinja um valor extremal no ponto x_0 é necessário que a derivada nesse ponto seja zero ou não exista e esse ponto chama-se ponto crítico. Se x_0 é ponto crítico da função (x), então para $f(x)$ atinja extremo no ponto x_0 é suficiente que ao passar por este ponto, a sua derivada mude de sinal. Derivando $f(x)$, temos: $f'(x) = -x^2$ e será igual a zero para $x = 0$. Note que $f'(x) = -x^2 < 0, \forall\, x$ da vizinhança de $x = 0$, com excepção do proprio ponto $x = 0$, onde a derivada é nula. Querendo dizer deste modo, que $f(x)$ não atinge valores extremais. Logo, a alternativa certa é **E**.

40. A função $f(x) = sen\, x - 1$ é monótona crescente no intervalo:

A. $[-\frac{3\pi}{2}, 0]$ B. $[0, \pi[$ C. $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ D. $[-\pi, 0[$ E. Em nenhum dos intervalos

Resolução: $f(x)$ é monótona crescente num intervalo se nesse intervalo, a sua derivada for positiva, i.e., se $f'(x) > 0$ para $x \in (a, b)$, então $f(x)$ é monótona crescente neste intervalo. Então,

$$y' = (sen\, x - 1)' = \cos x > 0 \Longleftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Quando $k = 0$, temos $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, então a alternativa certa é **C**.

41. A função inversa de $f(x) = e^{x-1}$ é:

A: $f^{-1}(x) = \ln x - 1$ B: $f^{-1}(x) = \ln(x - 1)$ C: $f^{-1}(x) = \ln x$
D: $f^{-1}(x) = x - 1$ E: $f^{-1}(x) = 1 + \ln x$

Resolução : Uma função possui inversa se ela for injectiva e sobrejectiva. Será injectiva se $\forall\, x_1,\, x_2 \in D_f$ tal que $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$. Verifiquemos: Notemos que $f(x) = e^{x-1}$ tem como domínio $D_f = \mathbb{R}$ e contradomínio $CD_f =]0, +\infty[$. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que, $f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow e^{x_1-1} = e^{x_2-1} \Longrightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Longrightarrow x_1 = x_2$. Então, a função é injectiva. $f(x)$ é sobrejectiva se $\forall\, y \in CD_f, \exists\, x \in D_f : y = f(x)$. Para isso, tomamos $y \in]0, +\infty[$, assim teremos $y = e^{x-1} \Longrightarrow \ln y = x - 1 \Longrightarrow x = 1 + \ln y \in \mathbb{R}$. Então, $f(x)$ é sobrejectiva e por conseguinte, ela é bijectiva. Logo, possui inversa. Se na última expressão, trocar os papeis de x e y, obtemos $y = \ln x - 1 \Longrightarrow f^{-1}(x) = 1 + \ln x$. Logo, a resposta certa é alternativa **E**.

42. A figura ao lado representa a função $y = f(x)$. O valor de $g(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{f(x)}$ é:

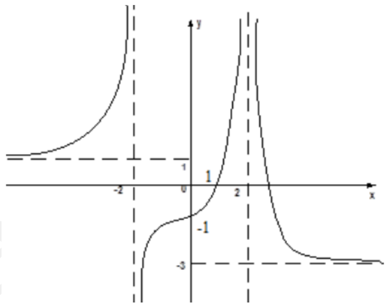
    A: 0 B: -1 C: $+\infty$ D: $-\infty$ E: 1

    Resolução: Fazendo leitura no gráfico vemos que $f(x) \to 0^-$, $x \to 1^-$, então
    $g(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$. Logo, a resposta certa é alternativa **D**.

43. Na função ao lado, $f[f(1)]$ é igual a:

    A: -1 B: 2 C: -2 D: 1 E: 0

    Resolução : Olhando no gráfico, $f(1) = 0$ e $f[f(1)] = f(0) = -1$. Então a resposta certa é **B**.



44. A primeira derivada é crescente em:

    A: $]-2, 2[$ B: $]-\infty, -2[\cup]-2, 2[$ C: $]-\infty, -2[\cup]0, 2[$
    D: $]-\infty, -2[$ E: Nenhuma das anteriores

    Resolução : A primeira derivada é crescente nos intervalos onde a função possui concavidade virada para cima, pois se $g(x) = f'(x)$, então a primeira derivada $g(x)$ é positiva nesses intervalos e note que $g'(x) = f''(x)$. Então, a primeira derivada $f'(x)$ é crescente para $x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$. A resposta certa é **E**.

45. A segunda derivada anula-se em:
    A: $x = 2$ B: $x = -3$ C: $x = -1$ D: $x = 1$ E: $x = 0$

    Resolução : A segunda derivada anula-se em pontos onde a função muda de concavidade e faça sentido nesse ponto. Então, $f''(x) = 0$ para $x = 0$. Logo, a resposta certa é **E**.

46. O polinómio obtido na divisão de $x^3 + x^2 - 3x - 3$ por $x + 1$ para $x = 1$ é igual a:

    A: 1 B: -1 C: -2 D: 0 E: Nenhuma das alternativas anteriores

    Resolução : Usando o método de Ruffin temos

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -3 & -3 \\ -1 & & -1 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}$$

    Assim o polinómio quociente é $q(x) = x^2 - 3$. Assim, $q(1) = 1^2 - 3 = -2$. Logo, a resposta certa é **C**.

47. $x^2 + y^2 = 34$ e $xy = 15$, então $x + y$ é igaul a:

    A: 6 B: -7 C: ± 8 D: 8 E: 7

    Resolução : Consideremos $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = (x^2 + y^2) + 2xy = 34 + 2 \cdot 15 = 64 \Longrightarrow x + y = \pm\sqrt{64} = \pm 8$. Nenhuma alternativa está correcta. A resposta certa é **C**.

48. O módulo da diferença das soluções do sistema $\left\{\begin{array}{lcr} x+y & = & -7 \\ xy & = & 6 \end{array}\right.$ é igual a:

A: 6 B: -7 C: -8 D: 8 E: 5

Resolução : Resolvendo o sistema, temos:

$$\left\{\begin{array}{lcr} x+y & = & -7 \\ xy & = & 6 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcr} y & = & -x-7 \\ x(-x-7) & = & 6 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcr} y & = & -x-7 \\ x^2+7x+6 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcr} y & = & -x-7 \\ (x+6)(x+1) & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcr} y & = & -x-7 \\ x=-6 & \vee & x=-1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} (x=-6 & \wedge & y=-1) \\ & \vee & \\ (x=-1 & \wedge & y=-6) \end{array}\right.$$

Desta forma, a resposta certa é $|-1-(-6)| = 5$ (E).

49. QUESTÃO ANULADA!

50. A função $f(x)$ satisfazendo $f(x) = f''(x)$ para qualquer número real x é:

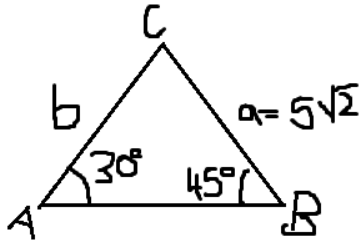
A: x^3 B: $sen\, x$ C: $\cos x$ D: $3e^x$ E: e^{3x}

Solução: É sabido que $(cf(x))' = cf'(x)$ para toda constante real c. Por outro lado $(e^x)' = e^x$ então, $(3e^x)'' = 3e^x$. Então, a resposta certa é alternativa **D**. As funções das outras alternativas não satisfazem a equação $f(x) = f''(x)$. Por exemplo, $(\cos x)'' = -\cos x \neq \cos x$.

51. No triângulo ABC, o lado $a = 5\sqrt{2}$, o ângulo $\angle A = 30^o$, o $\angle B = 45^o$. A medida do lado b é igual à:

A: $10\,cm$ B: $9\,cm$ C: $8\,cm$ D: $7\,cm$ E: $5\,cm$

Resolução: Usando o teorema dos senos para o triângulo ao lado, temos $\dfrac{a}{sen30^o} = \dfrac{b}{sen45^o} \Longrightarrow \dfrac{5\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Longrightarrow b = 10\,cm.$



A resposta certa é **A**.

52. A derivada da função $f(x) = |1-x|$ no ponto $x=1$ é igual à:

A: -1 B: 1 C: 0 D: $0,5$ E: Não existe

Resolução: Para determinar a derivada no ponto $x=1$, devemos achar as derivadas à esquerda e à direira de $x=1$, i.e.,

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$
$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

As derivadas à esquerda e à direita de $x=1$ são diferentes, logo a função não é diferenciável neste ponto, i.e., não existe a derivada de $f(x) = |1-x|$ no ponto $x=1$. Logo, a opção certa é **E**.

53. A primitiva da função $f(x) = \cos x$ sendo c uma constante é:

A: $F(x) = -sen\, x + c$ B: $F(x) = sen\, x + c$ C: $F(x) = 2sen\, x$
D: $F(x) = sen\, x$ E: $F(x) = -\cos x + c$

Resolução: A função primitiva de $f(x) = \cos x$ é uma função cuja a sua derivada é igual a $f(x)$, e é determinado pelo integral indefinido

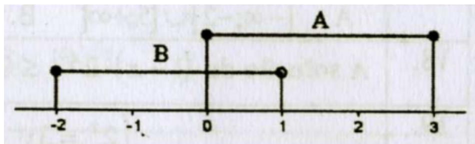
$$F(x) = \int f(x)dx = \int \cos x dx = sen\, x + c.$$

A alternativa certa é **B**. Derivando as funções das outras alternativas, não iremos obter $F'(x) = f(x) = \cos x$.

Exame de Matemática de 2017

Correcção do exame de Matemática de 2017

Na figura estão representados os intervalos A e B contidos no conjunto $U =]-5;6[$. Com base na informação responda as questões de 1,2 e 3.



1. Os intervalos representados na figura são:

   A: $[-2;1]$ e $[0;3]$ B: $]-2;1[$ e $[0;3]$ C: $[-2;1[$ e $]0;3[$ D: $]-2;1[$ e $[0;3]$ E: $[-2;1[$ e $]0;3[$

   Resolução: Fazendo leitura ao gráfico, os conjuntos representados são $[-2;1]$ e $[0,3]$, o que quer dizer que a resposta certa é **A**.

2. O resultado da operação $A \setminus B$ é:

   A: $[1;3]$ B: $]1;3[$ C: $]0;1]$ D: $]1;3]$ E: $[0;1[$

   Solução: $A \setminus B =]1,3]$, então a resposta certa é **D**.

3. O conjunto $[0;1[$ é equivalente à:

   A: $A \cup B$ B: $A \setminus B$ C: $c(B)$ D: $A \cap B$ E: $c(A)$

   Solução: A resposta certa é **C**.

4. $\sqrt{3}$ não pertence ao conjunto:

   A: $[1;2[$ B: $\{1;2\}$ C: $]1;2]$ D: $[1;2]$ E: $]1;2[$

   Resolução: Notemos que $1 < \sqrt{3} < 2$, então o único conjunto onde $\sqrt{3}$ não pertença é o conjunto formado por apenas dois elementos $\{1;2\}$, logo, a alternativa certa é **B**.

5. Em Dezembro houve um aumento de 50% no preço de um produto que custava $40.000,00\,MT$. O produto passou a custar:

   A: $60.000,00\,MT$ B: $50.000,00\,MT$ C: $20.000,00\,MT$ D: $30.000,00\,MT$ E: $70.000,00\,MT$

   Resolução: O preço final do produto é igual a $40.000,00\,MT + 0,5 \cdot 40.000,00\,MT = 60.000,00\,MT$. Logo, a resposta certa é a alternativa **A**.

6. Três números inteiros consecutivos foram divididos por 2, 3 e 5, reespectivamente, e a soma dos seus quocientes é igual a 9. A soma desses números é:

A: 24 B: 21 C: 18 D: 27 E: 33

Resolução: Sejam a, $a+1$, $a+2$ os tr$\hat{2}$s números inteiros consecutivos. Então,

$$\frac{a}{2}+\frac{a+1}{3}+\frac{a+2}{5}=9 \Longrightarrow \frac{15a+10(a+1)+6(a+2)}{30}=9 \Longrightarrow 31a+22=9\cdot 30 \Longrightarrow a=\frac{248}{31}=8.$$

Logo, os números são 8, 9 e 10. Assim a sua soma é $8+9+10=27$. Então, a resposta certa é **D**.

7. Simplificando a expressão $\dfrac{p^2+2p}{(p+1)(p-1)+(p+1)}$ obtém-se:

A: $\dfrac{p+2}{p(p+1)}$ B: $\dfrac{p+2}{p+1}$ C: $\dfrac{p}{p+1}$ D: $\frac{p}{(p+1)(p-1)}$ E: $\dfrac{p(p+2)}{(p+1)(p-2)}$

Resolução: Temos:

$$\frac{p^2+2p}{(p+1)(p-1)+(p+1)}=\frac{p(p+2)}{(p+1)[(p-1)+1]}=\frac{p(p+2)}{p(p+1)}=\frac{p+2}{p+1}.$$

Esta simplificação é válida para $p\neq 0$. Portanto, a resposta certa é **B**.

8. A expressão equivalente a $\dfrac{a^3-5a^2+6a}{a^3-8}\div\dfrac{a^2-9}{a^2+2a+4}$ é:

A: $\dfrac{a+3}{a+2}$ B: $\dfrac{a-2}{a+3}$ C: $\dfrac{a+3}{a}$ D: $\dfrac{a}{a+2}$ E. $\dfrac{a}{a+3}$

Resolução: Temos:

$$\begin{aligned}\frac{a^3-5a^2+6a}{a^3-8}\cdot\frac{a^2-9}{a^2+2a+4}&=\frac{a(a^2-5a+6)}{(a-2)(a^2+2a+4)}\div\frac{(a-3)(a+3)}{a^2+2a+4}\\&=\frac{a(a-3)(a-2))}{(a-2)(a^2+2a+4)}\cdot\frac{a^2+2a+4}{(a-3)(a+3)}=\frac{a}{a+3}\end{aligned}$$

Esta simplificação é válida para $a\neq 2$, $a^2+2a+4\neq 0$, $a\neq 3$ e aqui usamos os casos notáveis $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$, $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$. Assim, a resposta certa é **E**.

9. O valor de $\log_7 7\cdot\sqrt[5]{49}$ é:

A: $\dfrac{2}{5}$ B: $\dfrac{5}{7}$ C: $\dfrac{7}{5}$ D: 10 E: 11

Resolução : Temos: $\log_7(7\cdot\sqrt[5]{49})=\log_7\left(7\cdot 49^{\frac{1}{5}}\right)=\log_7\left(7\cdot 7^{\frac{2}{5}}\right)=\log_7\left(7^{\frac{7}{5}}\right)=\dfrac{7}{5}\cdot\log_7 7=\dfrac{7}{5}$. Logo, a resposta certa é **C**.

10. O valor de $\dfrac{a^2(ba^{-2}-ab^{-2})}{a^2-(-b^{-3})}$ se $a=-2$ e $b=-1$ é:

A: $-\dfrac{7}{3}$ B: $-\dfrac{7}{5}$ C: $\dfrac{9}{5}$ D: $\dfrac{7}{3}$ E: Nenhuma das alternativas anteriores

Resolução : Sendo $a = -2$ e $b = -1$, temos:

$$\frac{a^2(ba^{-2} - ab^{-2})}{a^2 - (-b^{-3})} = \frac{b - a^3b^{-2})}{a^2 + b^{-3}} = \frac{(-1) - (-2)^3(-1)^{-2}}{(-2)^2 + (-1)^{-3}} = \frac{-1+8}{4-1} = \frac{7}{3}.$$

Então, a resposta certa é **D**.

11. A equação da circunfrrência de centro $(-1; 2)$ que passa pelo ponto $(-1; 5)$ é:

A: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ B: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$ C: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$
D: $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução : A equação da circunferência de centro $(x_0; y_0)$ e raio R é dada por $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$. Sendo que ela passa pelo ponto $(-1; 5)$ e está dado o centro, então $(-1+1)^2 + (5-2)^2 = R^2 \Longrightarrow R = 3$. Então, a equação requerida é $(x+1)^2+(y-2)^2 = 9$. Logo, a resposta certa é **B**. Para as outras alternativas, o ponto dado não irá satisfazer as correspondentes equações, por exemplo se substituirmos na alternativa **A** temos, $(-1-1)^2 + (2-2)^2 = 4 \neq 9$.

12. O valor da expressão $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-10} \times 27^{-3} + (0,2)^{-4} \times 25^{-2} + \left(64^{\frac{1}{9}}\right)^{-3}$ é:

A: 6 B: 7 C: 9 D: 8 E: 5

Reolução : Temos,

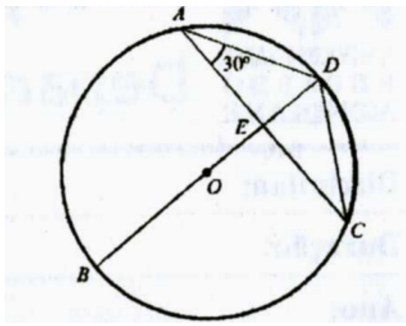
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \times 27^{-3} + (0,2)^{-4} \times 25^{-2} + \left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3} = 3^{10} \cdot \left(3^2\right)^{-3} + \left(\frac{2}{10}\right)^{-4} \cdot \left(5^2\right)^{-2} + \left(\left(2^6\right)^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}$$

$$= 3^{10} \cdot 3^{-9} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} \cdot 5^{-4} + \left(2^{-\frac{6}{9}}\right)^{-3} = 3 + 5^4 \cdot 5^{-4} + \left(2^{-\frac{2}{3}}\right)^{-3} = 3 + 5^0 + 2^2 = 8.$$

Desta forma, a resposta certa é **D**.

13. Na figura ao lado os pontos A, B, C e D pertencem à uma circunferência de centro O e E é o ponto médio do segmento $\overline{OD}$. Se $\overline{AD}$ mede $5\,cm$ a medida do raio da circunferência é:

A: $5\,cm$ B: $\dfrac{5}{2}\,cm$ C: $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\,cm$ D: $5\sqrt{3}\,cm$ E: $\dfrac{1}{2}\,cm$



Resolução: Sendo $\overline{OE}$ igual ao segmento $\overline{ED}$, então o triângulo OAD é isóscele e consequentemente o triângulo EAD é rectângulo em E. Sendo assim, $sen30^o = \dfrac{|ED|}{|AD|} \Longrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{|ED|}{5cm} \Longrightarrow |ED| = \dfrac{5}{2}cm$. Deste modo, o raio da circunferência será $r = 2 \cdot |ED| = 5cm$. Logo, a resposta certa é **A**.

14. O polinómio $P(x) = x^2 + ax + b$ é divisível por $Q(x) = x - 1$ e $R(x) = x + 3$. Os valores de a b são:

A: $a = -3$, e $b = 2$ B: $a = -2$, e $b = 3$ C: $a = -2$, e $b = -3$ D: $a = 2$, e $b = -3$ E: $a = 2$, e $b = 3$

Resolução : Visto que $P(x)$ é divisível por $Q(x)$ e $R(x)$, então $P(x) = Q(x) \cdot R(x) \Longrightarrow x^2 + ax + b = (x-1)(x+3) = x^2+2x-3$. Dois polinómios são iguais se e somente se os coeficientes de termos semelhantes são iguais, i.e., $a = 2$, $b = -3$. Logo, a resposta certa é **D**.

15. Uma gota de tinta caiu num pano formando um círculo de raio igual a $k\,cm$. Se de hora em hora a medida do raio duplica, depois de seis horas a medida do raio será:

A: $12\,k\,cm$ B: $6\,k\,cm$ C: $64\,k\,cm$ D: $32\,k\,cm$ E: $8\,k\,cm$

Resolução : Se de hora em hora a medida do raio duplica, temos a seguinte sequência: $k\,cm$, $2\,k\,cm$, $4\,k\,cm$, $8\,k\,cm, \ldots$ Esta é uma progressão geométrica com razão iguyal a $q = \frac{8k}{4k} = \frac{4k}{2k} = \frac{2k}{k} = \ldots = 2$. Assim, o termo geral deste sequência é $r_n = a_1 \cdot q^{n-1} = k \cdot 2^{n-1}$. Portando, após seis horas o raio será iguala a $r = r_6 = k \cdot 2^{6-1} = 32\,k\,cm$. Então, a resposta certa é **D**.

16. O contradomínio de funcção $f(x) = 2sen\,x$ de domínio $[-\dfrac{\pi}{6}, \pi]$ é:

A: $[-1; 2]$ B: $]-1; 2[$ C: $[-2; 2]$ D: $[-1; 1]$ E: $[-2; 1]$

Resolução: Note que no domínio $[-\frac{\pi}{6}, 0]$ a função $-\dfrac{1}{2} \leq senx \leq 0$ e no domínio $[0, \pi]$, $0 \leq sen\,x \leq 1$. Combinano esses contradomínios temos $-\frac{1}{2} \leq sen\,x \leq 1$. Então, multiplicando ambo os membros desta inequação por 2, temos $-1 \leq 2sen\,x \leq 2$. Logo, a resposta certa é **A**.

17. A solução da inequação $x^2 < 3x + 10$ é:

A: $[-\infty, -2] \cup [5, +\infty[$ B: $]-\infty, -2] \cup [5, +\infty[$ C: $[-2; 5]$ D: $]-2; 5[$ E: $[-2; 0] \cup [5, +\infty[$

Resolução: A inequação $x^2 < 3x + 10$ é equivalente à $x^2 - 3x - 10 < 0 \Longleftrightarrow (x-5)(x+2) < 0$.

$$(x-5)(x+2) < 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x-5 > 0 \wedge x+2 < 0 \\ \vee \\ x-5 < 0 \wedge x+2 > 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x > 5 \wedge x < -2 \\ \vee \\ x < 5 \wedge x > -2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \emptyset \\ \vee \\ -2 < x < 5 \end{array} \right.$$

O que quer dizer que $x \in]-2; 5[$. Logo, a alternativa certa é **D**.

18. A solução da inequação $(1-x) \cdot 2^{x-1} \leq 0$ é:

A. $]-\infty; 1]$ B. $[-1; 1]$ C. $[1; +\infty[$ D. $]-\infty; 1]$ E. $]1; +\infty[$

Resolução: O factor 2^{x-1} nunca é negativo e nem zero, poratnto o sinal da expressão depende inteiramente do sinal de $1-x$, i.e., $(1-x)e^{x-1} \leq 0 \Longleftrightarrow 1-x \leq 0 \Longrightarrow x \geq 1$. O que quer dizer que $x \in [1, +\infty[$. A resposta certa é **C**.

19. Dado o sistema $\left\{ \begin{array}{l} 2^x = 3y \\ 3^x = 2y \end{array} \right.$. O valor de $x + y$ é igual à:

A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{7}{6}$ C. $-\frac{7\pi}{6}$ D. $\frac{2}{3}$ E. $-\frac{5}{6}$

Resolução: Dividindo a primeira equação pela segunda, temos

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{3y}{2y} \Longrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2} \Longrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Longrightarrow x = -1.$$

Da equação $2^x = 3y$ temos $2^{-1} = 3y \Longrightarrow y = \frac{1}{6}$. Assim, $x + y = -1 + \frac{1}{6} = -\frac{5}{6}$. Logo, a resposta certa é alternativa **E**.

20. A inversa da função $f(x) = 4^{x-1}$, é:

A: $f^{-1}(x) = -1 + \log_4 x$ B: $f^{-1}(x) = 1 - \log_4 x$ C: $f^{-1}(x) = 4 + \log_4 x$
D: $f^{-1}(x) = 1 + \log_4 x$ E: $f^{-1}(x) = \log_4(x + 1)$

Resolução: Uma função possui inversa se ela for injectiva e sobrejectiva. Será injectiva se $\forall\, x_1,\, x_2 \in D_f$ tal que $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$. Verifiquemos: Notemos que $f(x) = 4^{x-1}$ tem como domínio $D_f = \mathbb{R}$ e contradomínio $CD_f =]0, +\infty[$. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que,

$$f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow 4^{x_1-1} = 4^{x_2-1} \Longrightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Longrightarrow x_= x_2.$$

Então, a função é injectiva.

$f(x)$ é sobrejectiva se $\forall\, y \in CD_f$, $\exists\, x \in D_f : y = f(x)$. Para isso, seja $y \in]0, +\infty[$, então $y = 4^{x-1} \Longrightarrow \log_4 y = x - 1 \Longrightarrow x = 1 + \log_4 y \in \mathbb{R}$. Então, $f(x)$ é sobrejectiva e visto que é também injectiva, logo é bijectiva. Deste modo, possui inversa. Se na última expressão, trocar os papeir de x e y, obtemos $y = 1 + \log_4 x \Longrightarrow f^{-1}(x) = 1 + \log_4 x$. Assim, a resposta certa é **D**.

21. O termo seguinte da sucessão 0, 3, 8, 15, 24, 35, ... é:

A. 44 B. 38 C. 43 D. 45 E. 48

Resolução: Esta sucessão não é uma progressão (nem aritimética, muito menos geométrica). Mas a sucessão das diferenças de termos consecutivos i.e., $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2, \ldots$ é 3, 5, 7, 9, 9, ... Isto quer dizer que o termo actual da sucessão dada é igual a adição do termo anterior pelo correspondente termo dos números ímpares, i.e., $a_n = a_{n-1} + (2n - 1)$, $n = 2, 3, \ldots$ Assim, o termo seguinte requerido é $a_7 = a_6 + (2 \cdot 7 - 1) = 35 + 13 = 48$. Logo, a resposta certa é **E**.

22. De uma progressão (a_n) sabe-se que a razão é $-\frac{1}{3}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira:

A: (a_n) é infinitamente grande
B: (a_n) é extritamente decrescente
C: (a_n) é limitada
D: (a_n) é extritamente crescente
E: Nenhuma das alternativas anteriores

Resolução: A progreção com razão $-\frac{1}{3}$ tem como termo geral $a_n = a_1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. Neste contexto, independentemente do sinal do primeiro termo, o termo anterior terá sinal diferente do termo actual, i.e., é uma sucessão de termos alternados, então ela não pode ser monótona (crescente ou decrescente). Mas, $|a_n| = \left|a_1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right| \leq \frac{|a_1|}{3} \leq |a_1|$, $\forall\, n$. isto que dizer que a sucessão é limitada. Logo, a resposta certa é alternativa é **C**.

23. Numa progressão aritmética $a_1 + a_5 = 16, \quad a_5 + a_9 = 40$. O primeiro termo e a diferença são respectivamente:

A: $a_1 = 3,\ d = 2$ B: $a_1 = 2,\ d = 3$ C: $a_1 = 3,\ d = -2$ D: $a_1 = 2,\ d = -3$ E: $a_1 = 4,\ d = 2$

Resolução: O termo geral de uma pprogressão aritmética é dado por $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$. Assim sendo, das equações dadas temos

$$\begin{cases} a_1 + a_5 = 16 \\ a_5 + a_9 = 40 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 + 4d = 16 \\ a_1 + 4d + a_1 + 8d = 40 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 4d = 16 \\ 8d = 24 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 4d = 16 \\ d = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 4 \cdot 3 = 16 \Longrightarrow a_1 = 2 \\ d = 3 \end{cases}$$

Então, resposta certa é **B**.

24. A soma dos termos de uma progressão geométrica infinita de razão $\frac{1}{2}$ é igual a 6. O primeiro termo é:

A: 12 B: 2 C: 3 D: $\dfrac{1}{2}$ E: $\dfrac{1}{3}$

Resolução: A soma dos termos de uma progressão geométrica infinita com $|q| < 1$ é $S = \dfrac{a_1}{1-q}$, onde q é a razão e a_1 o primeiro dermo da sucessão. Então, $6 = \dfrac{a_1}{1-\frac{1}{2}} \Longrightarrow a_1 = 3$. A resposta certa é alternativa **C**.

25. O limite da sucessão de termo geral $a_n = \left(\dfrac{n-5}{n+5}\right)^n$ é:

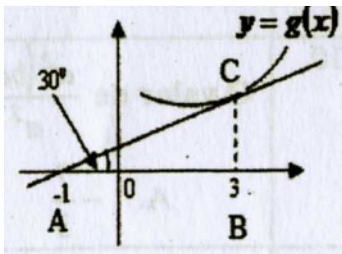
A: e^{10} B: e^5 C: e^{15} D: $\frac{1}{e^5}$ E: $\frac{1}{e^{10}}$

Resolução: Calculando o limite da sucessão dada temos: $\lim \left(\dfrac{n-5}{n+5}\right)^n = [1^\infty]$ e é uma indeterminação. Vamos levantar essa indeterminação:

$$\lim \left(\frac{n-5}{n+5}\right)^n = e^{\lim\left(\frac{n-5}{n+5}-1\right)\cdot n} = e^{\frac{-10n}{n+5}} = e^{\frac{-10n}{n(1+\frac{1}{n})}} = e^{-10} = \frac{1}{e^{10}}.$$

Então, a resposta certa é **E**.

Na figura abaixo está representada parte de uma função e uma recta tangente à curva no ponto de abcissa $x = 3$. Com base no gráfico responda as questões 26, 27 e 28.



26. $g'(3)$ é igual a:

A: 1 B: $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C: 7 D: $\sqrt{7}$ E: 0

Resolução: A derivada de $g(3)$ é igual ao declive da tangente à curva de $f(x)$ no ponto $x = 3$ que é a tangente do ângulo formado pela recta tangente e o eixo Ox. Assim, temos $g'(3) = tg(30^o) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Assim a resposta certa é alternativa **B**.

27. A medida de $\overline{AC}$ é:

    A: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B: $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ C: $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ D: $\sqrt{\frac{7}{2}}$ E: $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

    Resolução: O triângulo ABC é rectângulo em B. Então, $\cos 30^o = \dfrac{|AB|}{|AC|} \Longrightarrow |AC| = \dfrac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. Assim a resposta certa é alternativa **E**.

28. $g(3)$ é igual a:

    A: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B: $2\sqrt{3}$ C: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ D: $4\sqrt{3}$ E: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

    Resolução: O valor da função no ponto $x = 3$ é igual ao valor da recta tangente nesse ponto. Esta recta passa pelo ponto $A(-1, 0)$, cujo coefiente angular $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (que determinamos no exerciicio 26). Esta recta tem como equação $y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1) \Longrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$. Deste modo, $g(3) = \frac{\sqrt{3}}{3}(3+1) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Então, a resposta certa é altenativa **C**. As outras alternativas não são correctas pois quando substituidos na equação da recta, o valor de x não será 3. Por exemplo, se $g(3) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1) \Longrightarrow x = 1 \neq 3$.

29. O mínimo relativo da função $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ é:

    A: $x = -1$ B: $x = 2$ C: $x = 0 \vee x = 2$ D: $x = 1$ E: Nenhuma das anteriores

    Resolução: Se uma função atinge seu extremo no ponto x_0 então $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0)$ não existe. Vemos que $f'(x) = -3x^2 + 6x$ está definida e contínua em todo $\mathbb{R}$. A função terá extremo apenas nos pontos onde $f'(x) = 0 \Longrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Longrightarrow -3x(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 0 \vee x = 2$.

    Usando o teste da segunda derivada, i.e., se $f''(x_0) > 0$ então x_0 é ponto de mínimo local; se $f''(x_0) < 0$ então x_0 é ponto de máximo local. Determinando a segunda derivada, temos: $f''(x) = -6x + 6$. Para $x = 0$ temos que $f''(0) = 6 > 0$, então $x = 0$ é ponto de mínimo local. Para $x = 2$ temos $f''(2) = -6 \cdot 2 + 6 = -6$, então $x = 2$ é ponto de máximo local. Portanto, a resposta certa é alternativa **C**, pois temos a disjunção $'\vee'$, esta proposição é verdadeira se pelo menos uma das afirmações é verdadeira. A alternativa B não está certa porque é ponto de máximo (e não míniom) local. nas alíneas A e D os pontos não correspondem a pontos críticos da função dada, portanto a função não tem seus extremos nesses pontos.

30. A assímptotas verticais da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$ são:

    A: $x = 1 \vee x = -1$ B: $x = 1$ C: $x = 3 \vee x = -1$ D: $x = -1$ E: Nenhuma das anteriores

    Resolução: As potenciai assímptotas verticais são os pontos que anulam o denominador i.e., os pontos para os quais $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow (x+1)(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 1 \vee x = -1$

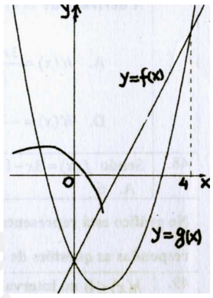
$$\lim_{x\to 1^{-1}} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-3}{x-1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty,$$

Logo $x = 1$ é assímptota vertical.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-3}{x-1} = \frac{-4}{-2} = 2$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x-3}{x-1} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

Todos os limites laterais são finitos e iguais. Logo, $x = -1$ não é assímptota vertical. Apenas $x = 1$ é assímptota vertical. A resposta certa é alternativa **B**.

Na figura estão representadas as funções $y = f(x) = 2x - 3$ e $y = g(x)$. Responda as questões de 31 a 35



31. O valor de $g(4)$ é:

    A: 6 B: 4 C: 8 D: 3 E: 5

    Resolução: Pela figura vemos que $g(4) = f(4) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$. Logo, a resposta certa é **E**.

32. $f(x) < g(x)$ em:

    A: $]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$ B: $]0, 4[$ C: $]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$ D: $[0, 4]$ E: Nenhuma das anteriores

    Resolução: $f(x) < g(x)$ nos intervalos onde o gráfico de $g(x)$ está acima do gráfico de $f(x)$ e isso acontece em $]-\infty, 0[\cup[4, +\infty[$. Portanto, a resposta certa é alternativa **C**.

33. O vérice da parábola é $V(1, -4)$ então os zeros da função são:

    A: -1 e 3 B: $-\frac{1}{2}$ e 3 C: $-\frac{1}{2}$ e 2 D: -1 e 2 E: -1 e $\frac{5}{2}$

    Resolução: Como vimos no exercício 31, $g(x)$ passa pelo ponto $A(4, 5)$ e pela hipótese o vértice é $V(1, -4)$. Então a equação da parábola dada na figura é $y = a(x - x_v)^2 + y_v$, onde (x_v, y_v) são coordenadas do vértice. Logo, $y = a(x-1)^2 - 4$. Substituindo o ponto $A(4, 5)$, temos $5 = a(4-1)^2 - 4 \Longrightarrow a = 1$. Assim, $y = (x-1)^2 - 4$. Determinando os zeros da função temos: $(x-1)^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x - 1 = \pm 2 \Longrightarrow x = 3 \vee x = -1$. A resposta certa é **A**.

34. A recta perpendicular a $y = f(x)$ que passa pelo ponto $(3, 4)$ é:

    A: $y - x - 11 = 0$ B: $2y + x - 11 = 0$ C: $2y - x + 11 = 0$ D: $2y + x + 11 = 0$ E: $2y - x - 11 = 0$

    Resolução: Sendo que a recta $y = f(x)$ tem declive $m = 2$, então a recta perpendicular a $y = f(x)$ tem declive $a = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{2}$. A equação da recta que passa por um ponto $(x_0, y_0) = (3, 4)$ e dado o seu declive $'a'$ é $y = a(x - x_0) + y_0 \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}(x-3) + 4 \Longrightarrow 2y = -x + 3 + 8 \Longrightarrow 2y + x - 11 = 0$. Deste modo, a resposta certa é a alternativa **B**.

35. O domínio de $y = \frac{1}{g(x)}$ é:

A: $\mathbb{R}$ B: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ C: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ D: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução: A função $\frac{1}{g(x)}$ não tem sentido nos pontos onde $g(x)$ não tem sentido e nos pontos onde $g(x) = 0$. A função $g(x)$ tem como domínio $\mathbb{R}$ e vimos que $g(x) = 0$ nps pontos $x = -1 \vee x = 3$. Logo, o domínio de $\frac{1}{g(x)}$ é $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$. Logo, a resposta certa é a alternativa **D**.

As alternativas A, B e C não estão correctas pois possuem pontos onde a função $\frac{1}{g(x)}$ não tem sentido em $\mathbb{R}$. Por exemplo, o conjunto em B possui o elemento $x = 3$ em que $\frac{1}{g(3)} = \frac{1}{0}$ que não existe.

36. De uma função h dum certo domínio, sabe-se que a sua derivada h' está igualmente definida no mesmo domínio e é dada por $h'(x) = -2 + \cos x$. Qual é o valor do limite $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{h(x) - h(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}$.

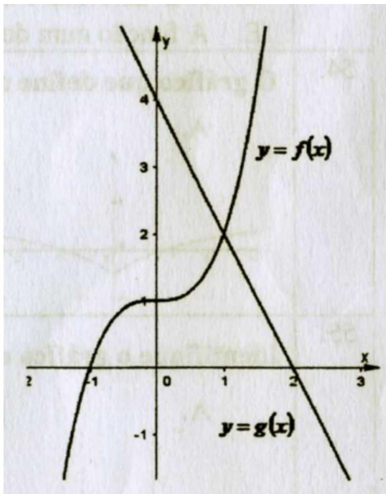
A: 4 B: -2 C: $\dfrac{2 - 3\sqrt{3}}{2}$ D: $\frac{2 - 3\sqrt{2}}{3}$ E: 1

Resolução: Sejam $f(x) = h(x) - h(\frac{\pi}{2})$ e $g(x) = x - \frac{\pi}{2}$. Vemos que $f(x)$ e $f'(x)$ estão definidas na vizinhança de $\pi/2$, igualmente para $g(x)$ e $g'(x)$ visto que $g(x)$ é função linear; $f(\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2}) = 0$ e $h'(\frac{\pi}{2}) = -2 \neq 0$ e $g'(\frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0$, então são satisfeitas as condições do teorema de L'hospital. Logo, tem lugar a igualdade

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{h'(x)}{1} = h'(\frac{\pi}{2}) = -2.$$

Logo, a resposta certa é alternativa **B**.

No gráfico estão representadas partes dos gráficos das funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$. Com base na figura responda as questões de 37 a 44.



37. O valor de x para $f(x) = g(x)$ é:

A: -1 B: 4 C: 2 D: 1 E: 0

Resolução: Fazendo leitura no gráfico vemos que $f(x) = g(x)$ para $x = 1$. O que quer dizer que a resposta certa é **D**.

38. O valor de x para $f[g(x)] = 1$ é:

A. -1 B. 4 C. 0 D. 1 E. 2

Rsolução: Seja $z = g(x)$ tal que $f(z) = 1$. Fazendo leitura ao gráfico temos: $f(z) = 1 \Longrightarrow z = 0$. Assim, $z = g(x) \Longrightarrow g(x) = 0 \Longrightarrow x = 2$. Logo, a resposta certa é **E**.

39. O produto $f(-2) \times g(-2)$ é:

A. $+\infty$ B. negativo C. $-\infty$ D. zero E. positivo

Rsolução: Pelo gráfico vemos que $f(-2) < 0$ pois neste ponto o gráfico se encontra abaixo do eixo Ox e $g(-2) > 0$ porque neste ponto o gráfico de $g(x)$ está acima do eixo Ox. Então o produto $f(-2) \times g(-2) < 0$, i.e., é negativo. Logo, a resposta certa é **B**.

40. O $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2}{f(x)}$ é igual a:

A: $-\infty$ B: $+\infty$ C: 0 D: -1 E: 2

Resolução: De acordo com o gráfico $f(x) \to 0^-$, $x \to -1^-$, então

$\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2}{f(x)} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$. Logo, a alternativa certa é **A**.

41. A área do triângulo formado pela recta $y = g(x)$ e pelos eixos das coordenadas é

A. $2u^2$ B. $6u^2$ C. $4u^2$ D. $1u^2$ E. $8u^2$

Resolução: Tem-se um triângulo rectângulo de base 2 cm e altura 4 cm. Assim,

$$\text{Area} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4.$$

Resposta certa é C.

42. A função $y = f(x)$ tem um ponto de inflexão em:

A: $x = -1$ B: $x = 0$ C: $x = 1$ D: $x = 2$ E: $x = 3$

Resolução : Ponto de inflexão é onde a função muda de concavidade. Para a função $y = f(x)$, isso acontece no ponto de abcissa $x = 0$. Logo, a resposta certa é alternativa **B**.

43. A expressão analítica da função $y = g(x)$ é:

A: $y = -2x$ B: $y = 2x - 1$ C: $y = -2x + 1$ D: $y = -2xx - 4$ E: $y = -2x + 4$

Resolução: A função $y = g(x)$ é uma recta que passa pelo pelos pontos $A(x_0, y_0) = A(0, 4)$ e $B(x_1, y_1) = B(2, 0)$ e a sua expressão analítica é dada por $y - y_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \Longrightarrow y - 4 = \dfrac{0-4}{2-0}(x - 0) \Longrightarrow y = -2x + 4$. Logo, a resposta certa é **E**.

44. O coeficiente angular da recta $y = g(x)$ é:

A: 2 B: 4 C: -2 D: -4 E: 1

Resolução : Visto que a expressão analítica de $y = g(x)$ é $y = -2x + 4$, então o seu coeficiente angular é -2. Então a resposta certa é **C**.

O gráfico da derivada de uma função $y = g(x)$ é uma parábola voltada para baixo cujas raizes são $x = 1$ e $x = 3$. Com base nesta infrmação responda as questões 45 e 46.

45. O(s) extremo(s) de $y = g(x)$ é (são):

A: $x = 1$ B: $x = -1$ C: $x = 3$ D: $x = 2$ E: $x = 3 \vee x = 1$

Resolução : Analisemos a tabela de variação do sinal da derivada. Visto que a parábola está voltada para baixo, temos:

	$]-\infty, 1[$	1	$]1, 3[$	3	$]3. + \infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$--$	$\nearrow$	$--$	$\searrow$

Pela tabela vemos que $x = 1$ é ponto de mínimo local e $x = 3$ é ponto de máximo local. Logo, a resposta certa é **E**. As alternativas A e C estão simplesmente incompletas.

46. É FALSO afirmar que a função $y = g(x)$:

A: tem um ponto de inflexão
B: é crescente no intervalo $]1; 3[$
C: é ímpar
D: é uma função do terceiro grau
E: intercepta pelo menos uma vez o eixo das abcissas

Resolução : A função $y = g(x)$ é um polinómio do terceiro grau e logicamente terá ao menos um zero, ao menos um ponto de inflexão e com base no exerício 45 ela é crescente em $]1; 3[$. Mas não está claro se é par ou não, mas se ela fosse par, os seus intervalos de decrescimento, por exemplo, deviam ser simétricos. mas não é o que acontece, então é falso afirmar que esta função é par. Logo, a resposta certa é **C**.

47. A derivada da função $y = \frac{x+2}{(x^2-1)^2}$ é:

A: $h'(x) = \dfrac{3x^2 + 8x + 1}{(x^2 - 1)^3}$ B: $h'(x) = \dfrac{3x^2 + 8x + 1}{(x^2 - 1)^4}$ C: $h'(x) = -\dfrac{3x^2 + 8x + 1}{(x^2 - 1)^3}$

D: $h'(x) = \dfrac{3x^2 - 8x - 1}{(x^2 - 1)^3}$ E: $h'(x) = \dfrac{3x^2 - 8x + 1}{(x^2 - 1)^3}$

Resolução : Derivando a função dada temos:

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{(x+2)' \cdot (x^2-1)^2 - (x+2) \cdot [(x^2-1)^2]'}{[(x^2-1)^2]^2} = \frac{(x^2-1)^2 - (x+2)(x^2-1) \cdot 2(x^2-1)'}{(x^2-1)^4} \\
&= \frac{(x^2-1)\left[x^2 - 1 - 4x(x+2)\right]}{(x^2-1)^4} = \frac{x^2 - 1 - 4x^2 - 8x}{(x^2-1)^3} = \frac{-3x^2 - 8x - 1}{(x^2-1)^3} = -\frac{3x^2 + 8x + 1}{(x^2-1)^3}.
\end{aligned}
$$

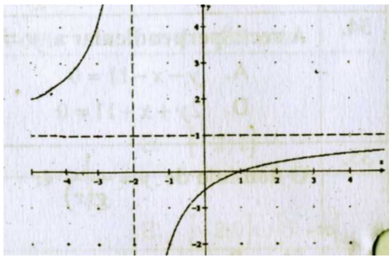
Logo, a resposta certa é **C**.

48. Sendo $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = -x + 4$, a função composta $fog(x)$ no ponto $x = 3$ será é igaul a:

A: 6 B: 2 C: 7 D: 3 E: Nenhuma das anteriores

Resolução : $fog(x) = f[g(x)] = f(-x+4) = 3(-x+4) - 1 = -3x + 12 - 1 = -3x + 11 \Longrightarrow fog(3) = f[g(3)] = -3 \cdot 3 + 11 = 2$. Logo, a resposta certa é **B**.

No gráfico está representada a função $h(x) = A + \frac{B}{X-C}$. Considerando o gráfico responda as questões 49 a 53.



49. $h(x) \leq 0$ no intervalo:
A: $[-2;1]$ B: $]-2;1[$ C: $]-2;1]$ D: $[-2;1[$ E: $]-2;+\infty[$

Resolução : A função $h(x)$ é negativa na parte em que o gráfico se localiza abaixo do eixo das abcissas $]-2,1[$ e em $x = 1$ ela anula-se. Portanto, $h(x) \leq 0$ no intervalo $]-2,1]$. Assim, a resposta certa é **C**.

50. O cntradomínio da função é:

A: $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ B: $\mathbb{R} \setminus \{1;-2\}$ C: $\mathbb{R}$ D: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ E: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Solução: Pelo gráfico vemos que o contradomínio são todos valores de $y \in \mathbb{R}$ com excepção $y = 1$, i.e., $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Logo, a resposta certa é **D**.

51. As assímptotas da função são:
A: $x = -2$ e $y = 1$ B: $x = 2$ e $y = 1$ C: $x = -2$ e $y = -1$ D: $x = 2$ e $y = -1$ E: Nenhuma das anteriores

Solução: Fazendo leitura ao gráfico temos assímptota vertical $x = -2$ e assímptota horizontal $y = 1$. Então, a resposta certa é alternativa **A**.

52. O valor de x para o qual se verifica $h[h(x)] = -\dfrac{1}{2}$ é:

A: 2 B: 1 C: -1 D: 0 E: -2

Resolução: Seja $z = h(x)$, então $h[z] = -\frac{1}{2} \Longrightarrow z = 0 \Longrightarrow h(x) = z \Longrightarrow h(x) = 0 \Longrightarrow x = 1$. Logo, a resposta cerrta é **B**.

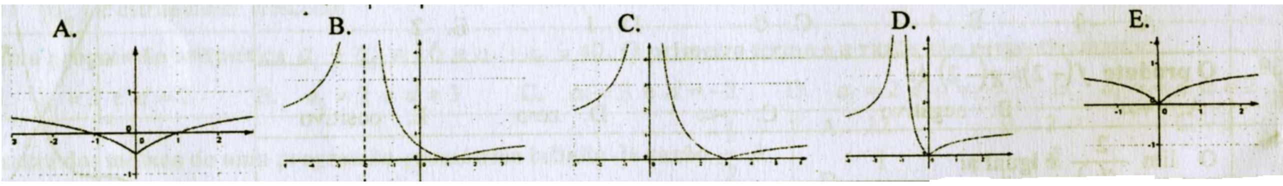
53. Em relação a função $y = h(x)$, é FALSO dizer que:

A: A função é injectiva
B: A função é derivável em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$
C: A 2^a derivada é negativa no intervalo $]-2;+\infty[$

D: A 1^a derivada admite um zero
E: A função num determinado ponto é descontínua

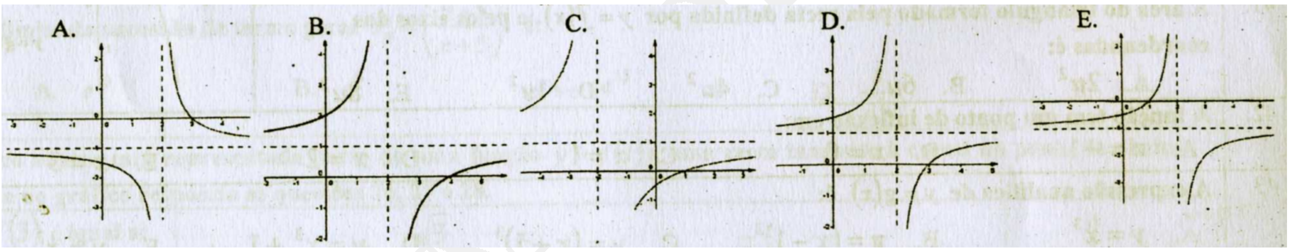
Resolução: De acordo com o gráfico a função é injectiva pois traçando linhas paralelas ao eixo dos Oy, cada uma toca o gráfico em apenas um ponto. No intervalo $]-2,+\infty[$ a concavidade está voltada para baixo, o que quer dizer que a segunda derivada neste intervalo é negativa. A função em todo seu domínio é crescente, logo é derivável e não possui pontos estacionários i.e., onde $f'(x)=0$. Mas por outro lado, um ponto de descontinuidade ou é da primeira espécie do tipo salto ou simplesmente é da segunda espécie, portando a alternativa **D** é falsa. Então, a resposta certa é **D**.

54. O gráfico que define a função $f(x)=|h(x)|$ é:



Resolução: Para a função $|h(x)|$ apenas os valores negativos de $h(x)$ irão ser multiplicados por -1 para se tornarem positivos e o respectivo gráfico é o indicado na alternativa **B**, i.e., a resposta certa é **B**.

55. Identifique o gráfico correspondente a função $y=\frac{x-3}{x-2}$.



Resolução: Note que podemos escrever a fução dada na forma $y=\frac{x-3}{x-2}=\frac{x-2-1}{x-2}=1-\frac{1}{x-2}$. Neste caso $y=1$ é assímtota horizontal; $x=2$ é assímptota vertical. Igualando $y=0$ temos $\frac{x-3}{x-2}=0\Longrightarrow x=3$ é zero da função. A ordenada na origem é $y=\frac{3}{2}$.

$$\lim_{x\to2^+}\frac{x-3}{x-2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to2^-}\frac{x-3}{x-2}=\frac{-1}{0^-}=+\infty.$$

A única função com essas características é a representada na alternativa **D**.

56. A solução do integral $\displaystyle\int\frac{3x+1}{x}dx$ é:

A: x^2+3x+c B: $3x+\ln|x|+c$ C: $3x^2+\ln|x|+c$ D: $\dfrac{3x^2+x}{x^2}+c$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução: Resolvendo o integral temos:

$$\int\frac{3x+1}{x}dx=\int\left(3+\frac{1}{x}\right)dx=\int 3dx+\int\frac{dx}{x}=3x+\ln|x|+c. \quad \text{Assim, a resposta certa é } \mathbf{B}.$$

57. Para que valores de x o número $z = 5x - 10 + (y+4)i$ é imaginário puro?

A: $x = 2 \wedge y \neq -4$ B: $y \neq -4$ C: $x \neq 2 \wedge y = -4$ D: $x = 2$ E: $x \neq 2 \wedge y \neq 4$

Resolução: Para que um número complexo seja imaginário puro é suficiente que a parte real seja igual a zero e para qualquer valor da parte imaginária. Para o nosso caso temos $5x - 10 = 0 \Longrightarrow x = 2$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Logo, a resposta certa é **D**.

- A alternativa A não está certa porque tem a condição $y \neq 4$ que não é necessária para o número seja imaginário puro.

Exame de Matemática de 2018

Correcção do exame de Matemática de 2018

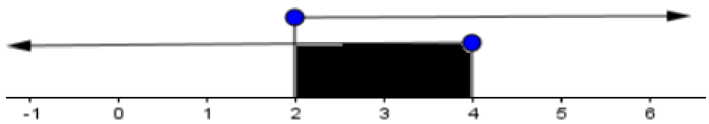
1. Dois números distam entre si 5 unidades, sendo um deles 3. A tradução da afirmação anterior em linguagem matemática é:

   A: $5-3$ B: $3-5$ C: $|x-5|=3$ D: $|3-x|=5$ E: $|3+x|=5$

   Resolução: A distância entre dois números é igual ao módulo da sua diferença. Seja x um dos números e $y=3$, então e visto que distam a 5 unidade, temos $|y-x|=5 \Longrightarrow |3-x|=5$. Logo, a resposta certa á **D**.

   As alternativas A e B não estão correctas pois a diferença não é igual a 5 unidades. A alternativa E não está correcta porque por definição distância entre x e y é $|y-x|$ e não $|y+x|$.

2. Na figura ao abaixo está representada a preto a solução da inequaãção:

   A: $|x-3|<1$ B: $|x-3|>1$ C: $|x-3|<7$ D: $|x-3|\leq 7$ E: $|x-3|\leq 1$

   Resolução: A solução representada na figura é $2 \leq x \leq 4$ e é procuremos a su inequação na forma $|x-3| \leq a \Longrightarrow -a \leq x-3 \leq a \Longrightarrow 3-a \leq x \leq 3+a \Longrightarrow (3-a=2 \wedge 3+a=4) \Longrightarrow a=1$. Assim, a correspondente inequação é $|x-3| \leq 1$. Então, a resposta certa é **E**.

   Todas inequações com $'<'$ ou $'>'$ não irão incluir os extremos do intervalo solução (alternativas A, B e C). Se resolver a inequação em D temos $-7 \leq x-3 \leq 7 \Longrightarrow -4 \leq x \leq 10$, que é diferente da solução representada.

3. Na equipa de futebol de salão do Bairro militam 10 jogadores. Pretende-se escalar o grupo que vai jogar na semana seguinte, tendo em conta que o Cossa e o Rafique devem obrigatoriamente fazer parte dos cinco seleccionados. Quantas possibilidades existem? Nota: num jogo uma equipa de futebol de salão é constituída por 5 jogadores.

A: C_{10}^{5} B: A_{10}^{5} C: C_{8}^{3} D: A_{8}^{3} E: P_5

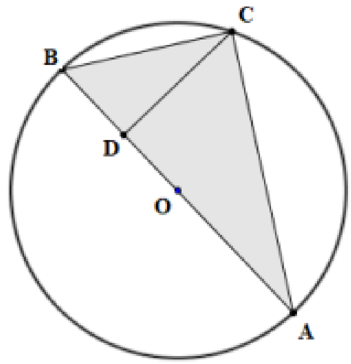
Resolução: Visto que já tem dois jogadores fixos na equipa, então resta-nos seleccionar os restantes 3. Visto que os conjuntos $\{\text{António}, \text{Joana}\}$ e $\{\text{Joana}, \text{António}\}$ são iguais, então a ordem de disposição não importa, nestes casos usamos combinação para evitar dupla contagem como é o caso de aranjos. Assim, temos C_8^3. Logo, a resposta certa é **C**.

4. Uma roleta mostra os números de 1 a 8. A probabilidade de acertar num número menor que 3 é:

A: $\frac{5}{8}$ B: $\frac{1}{4}$ C: $\frac{3}{4}$ D: $\frac{3}{8}$ E: $\frac{1}{8}$

Solução: O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, então número de casos possíveis é $n(\Omega) = 8$. O evento "Acerar um número menor do que 3" é $E = \{1, 2\}$, então o número de casos favoráveis é $n(E) = 2$. Logo, $P(E) = \frac{n(\Omega)}{n(E)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. A resposta certa é **B**.

Responda asquestões 5, 6 e 7 realcionadas com a figura ao lado



5. A circunferência de centro O, circunscrita no triângulo ABC, tem de perímetro 18,84 cm. Os segmentos OB e CD são perpendiculares e têm a mesma medida. A área do triângulo é:

A: $9,42cm^2$ B: $4,5cm^2$ C: $6cm^2$ D: $12cm^2$ E: $18cm^2$

Resolução: O raio da circunferência é $|OB| = |OA|$. Mais, $|AB| = 2|OB|$ é diâmetro da circunferência e $|DC|$ a altura do triângulo ABC. Temos:

$$\text{Perímetro do circulo} = 2\pi r \Rightarrow 18,84 = 2 \cdot 3,14r \Rightarrow r = 3cm.$$

Assim, a área do triângulo ABC é

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{3\,cm \;\cdot 3\,cm}{2} = 4,5\,cm^2.$$

A resposta certa é B.

6. A medida dos segmentos DB e DA estão na proporção de 1 para 3. A medida de DB, em cm, é igual a:

A: $\frac{9}{2}$ B: $\frac{5}{2}$ C: $\frac{3}{2}$ D: $\frac{2}{27}$ E: $\frac{7}{2}$

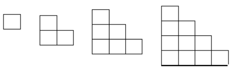
Resolução: Usando o diâmetro calculado no número 5, temos:

$$\frac{|DB|}{|DA|} = \frac{1}{3} \text{ e } |DA| + |DB| = 6cm. \Rightarrow |DA| = 3|DB|$$

$$\Rightarrow 3|DB| + |DB| = 6cm \Rightarrow |DB| = \frac{3}{2}cm.$$

A resposta certa é **C**.

7. PASSE PARA A PERGUNTA SEGUINTE

8. 

Ao lado está representada uma sequência de figuras. Mantendo-se essa lei de formação o número de quadrados na figura da posição 7 é:

A: 35 B: 30 C: 21 D: 36 E: 28

Resolução: A sequência de figuras acima corresponde a seguinte sequência de respectivos números de quadrados: 1, 3, 6, 10. Sendo $a_1 = 1$, vemos que $3 = a_2 = a_1 + 2$, $6 = a_3 = a_2 + 3$, $10 = a_4 = a_3 + 4$, continuando desta forma teremos $a_n = a_{n-1} + n$. Assim, $a_5 = a_4 + 5 = 10 + 5 = 15$, $a_6 = a_5 + 6 = 15 + 6 = 21$ e $a_7 = a_6 + 7 = 21 + 7 = 28$. Logo, a alternativa certa é **E**.

9. Dadas as proposiçẽes p e q, a negação de $p \wedge \sim q$ é:

A: $\sim p \wedge \sim q$ B: $\sim p \wedge q$ C: $\sim p \vee \sim q$ D: $\sim p \vee q$ E: $p \vee q$

Resolução: $\sim [p \wedge \sim q] \equiv \sim p \vee \sim (\sim q) \equiv \sim p \vee q$. Então, a resposta certa é **D**.

10. Dadas as proposições t: chove e r: vou a praia. A proposição S: não chove então vou a praia é tradizida simbolicamente por:

A: $\sim t \leftrightarrow \sim q$ B: $\sim t \wedge r$ C: $\sim t \vee \sim r$ D: $t \rightarrow \sim r$ E: $\sim t \rightarrow r$

Resolução: "Não chove" é negação da proposição "t: chove" e simbolicamente fica $\sim t$. A palávra "então" é condicional que simbolicamente é representado por " $\rightarrow$ ". Assim, a proposição s toma a forma simbolica $\sim t \rightarrow r$. Então a resposta certa é **E**.

11. Simplificando a expressão $\dfrac{3a^2 - 3x^2}{(a^2 + 2ax + x^2)^2(a^2 - 2ax + x^2)}$ obtém-se:

A: $-\dfrac{3}{a^2 - x^2}$ B: $-\dfrac{3}{x^2 - a^2}$ C: $-\dfrac{3}{(a^2 - x^2)(a^2 + x^2)}$ D: $\frac{3}{(a^2-x^2)(a^2+x^2)}$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução: Para a existência dessa expressão $((a^2 + 2ax + x^2)^2 \neq 0 \wedge a^2 - 2ax + x^2 \neq 0) \Longrightarrow (a + x)^4 \neq 0 \wedge (a - x)^2 \neq 0 \Longrightarrow a \neq \pm x$.

$$\begin{aligned} \frac{3a^2 - 3x^2}{(a^2 + 2ax + x^2)^2(a^2 - 2ax + x^2)} &= \frac{3(a - x)(a + x)}{(a + x)^4(a - x)^2} \\ &= \frac{3}{(a + x)^3(a - x)} = \frac{3}{(a + x)^2(a^2 - x^2)} \end{aligned}$$

Portanto, a resposta certa é **E**.

- As outras alternativas não estão certas, pois, por exemplo se $a = 2$ e $x = 1$, da expressão dada obtemos $\frac{1}{9}$ e substituiondo nas alternativas temos: A: -1 B: 1 C: $-\dfrac{1}{5}$ D: $\frac{1}{5}$

12. A expressão simplificada de $\sqrt{27 + \sqrt{23 + \sqrt[3]{4 + \sqrt{16}}}}$ é:

A: $4\sqrt{2}$ B: $2\sqrt{2}$ C: $\sqrt[24]{2}$ D: $3\sqrt{2}$ E. $5\sqrt{2}$

Resolução: Temos:

$$\sqrt{27+\sqrt{23+\sqrt[3]{4+\sqrt{16}}}}=\sqrt{27+\sqrt{23+\sqrt[3]{4+4}}}=\sqrt{27+\sqrt{23+\sqrt[3]{8}}}$$
$$=\sqrt{27+\sqrt{23+2}}=\sqrt{27+\sqrt{25}}=\sqrt{27+5}=\sqrt{32}=\sqrt{2^5}=4\sqrt{2}.$$

Logo, a resposta certa é **A**.

13. Simplificando a expressão $\dfrac{x+y}{x(x-2y)}-\dfrac{y}{(x+2y)x}-\dfrac{2(x+y)}{x^2-4y^2}$ obtém-se:

A: $\dfrac{1}{x}$ B: $-\dfrac{1}{x}$ C: $-\dfrac{1}{x-2y}$ D: $\frac{1}{x+2y}$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Para a existência da expressão $(x(x-2y)\neq 0 \wedge x+2y\neq 0 \wedge x^2-4y^2\neq 0) \Longrightarrow x\neq 0\wedge x-2y\neq 0\wedge x+2y\neq 0$.

$$\begin{aligned}&\frac{x+y}{x(x-2y)}-\frac{y}{(x+2y)x}-\frac{2(x+y)}{x^2-4y^2}\\&=\frac{(x+y)(x+2y)-y(x-2y)-2(x+y)x}{x(x^2-4y^2)}\\&=\frac{(x+y)(x+2y-2x)-y(x-2y)}{x(x^2-4y^2)}=\frac{(x+y)(-x+2y)-y(x-2y)}{x(x^2-4y^2)}\\&=\frac{-(x+y)(x-2y)-y(x-2y)}{x(x^2-4y^2)}=\frac{(x-2y)[-(x+y)-y]}{x(x^2-4y^2)}\\&=\frac{(x-2y)(-x-2y)}{x(x^2-4y^2)}=\frac{-(x-2y)(x+2y)}{(x-2y)(x+2y)x}=-\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

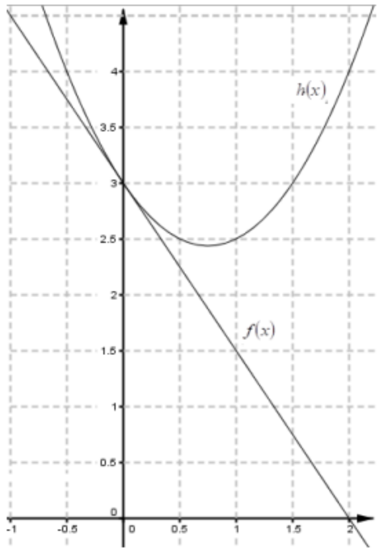
Logo, a resposta certa é **B**.

14. $x=2$ é raiz do polinómio $P(x)=x^3+ax^2-5x-2$. O valor de a é:

A: -1 B: 1 C: 0 D: 2 E: -2

Resolução : Sendo $x=2$ raiz do polinómio $P(x)$ então $P(2)=0\Longrightarrow 8+4a-10-2=0\Longrightarrow a=1$. Então, a resposta certa é **B**.

Com base no gráfico, responda às questões 15 a 20



15. A derivada da função no ponto $x = 0$ é:

A: $\frac{3}{2}$ B: $\frac{2}{3}$ C: $-\frac{3}{2}$ D: $-\frac{2}{3}$ E: $-\frac{1}{3}$

Resolução : As duas funções representadas no gráfico possuem derivadas iguais no ponto $x = 0$ e essa derivada é igual ao decluve da recta $y = f(x)$. Esta recta passa pelos pontos $(x_0, y_0) = (0, 3)$ e $(x_1, y_1) = (2, 0)$, então o declive dessa recta é $a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{0-3}{2-0} = -\frac{3}{2}$. Logo, a resposta certa é **C**.

16. A solução da equação $f(x) - h(x) = 0$ é:

A: $x = 2$ B: $x = 3$ C: $x = 0$ D: $x = -3$ E: $x = -2$

Reolução : $f(x)$ e $h(x)$ são iguais nos pontos onde se tocam e isso apenas contece para $x = 0$. Desta forma, a resposta certa é **C**.

17. Para $h(x) = 3$, o valor de x é:

A: 0 B: $1,5$ C: 2 D: 0 ou $1,5$ E: 0 ou 2

Resolução: Fazendo leitura do gráfico vemos que $h(x) = 3$ quando $x = 0$ ou $x = 1.5$. Logo, a resposta certas é **D** .

18. A expressão analítica da função é:

A: $f(x) = -3x + 3$ B: $f(x) = -2x + 3$ C: $f(x) = -x + 3$
D: $f(x) = -\frac{3}{2}x + 3$ E: $f(x) = \frac{3}{2}x + 3$

Resolução : Como vimos no exercício 15, o declive da recta $y = f(x)$ é $a = -\dfrac{3}{2}$. Vimos também que passa pelo ponto $(0, 3)$, então $y = -\frac{3}{2}(x - 0) + 3 \Longrightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3$. Logo, a resposta certa é **D**.

19. $h(x) \leq 3$ se:

A: $x \in]0; 1,5[$ B: $x \in [0; 1,5[$ C: $x \in]0; 1,5]$
D: $x \in [0; 1,5]$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução : $h(x) \leq 3$ é a parte do gráfico de $h(x)$ que fica de baixo da recta $y = 3$ e isso acontece no intervalo $[0; 1,5]$ Então, a resposta certa é **D**.

20. Os valores de que satisfazem a inequação $f(x) < h(x)$ são:

A: $\mathbb{R}$ B: $\mathbb{R}^+$ C: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ D: $\mathbb{R}^-$ E: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

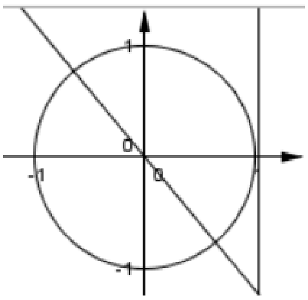
Resolução: A solução da inequação $f(x) < h(x)$ corresponde aos valores de x para os quais o gráfico de $f(x)$ está abaixo do gráfico de $h(x)$. Isso acontece em todo o eixo real com excepção do ponto $x = 0$, onde elas são iguais. Assim $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo, a resposta certa é **C**.

21. Dada a função $g(x) = 2^x$, a expressão $g(k+1) - g(k)$ é igual a:

A: $g(k+1)$ B: $g(k)$ C: $g(k-1)$ D: 1   E: $g(2k+1)$

Resolução: Temos: $g(k+1) - g(k) = 2^{k+1} - 2^k = 2^k(2-1) = 2^k = g(k)$. Logo, a alternativa certa é **B**.

22. A solução de $tg(x) > -\sqrt{3}$ é:



A. $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

B. $\frac{5\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

C. $\frac{5\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

D. $-\frac{3\pi}{2} + k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + k\pi$

E. $-\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

Resolução: A função tgx tem como período π, então

$$tg(x) > -\sqrt{3} \Longrightarrow tgx > tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Longrightarrow -\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

A resposta certa é **E**.

23. Seja dada a função $y = e^{2x}$. A solução da equação $y - xy' = 0$ é

A. $x = -\frac{1}{2}$ B. $x = 0 \vee x = -\frac{1}{2}$ C. $x = \frac{1}{2}$
D. $x = -1$ E. $x = 1$

Resolução: Temos: $y' = 2e^{2x} \Longrightarrow y - xy' = 0 \Longrightarrow e^{2x} - 2xe^{2x} = 0 \Longrightarrow 1 - 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$.

A resposta certa é **C**.

24. O produto $(2+ki)(2+i)$ é um número imaginário para k igual à:

A. $k = -1$ B. $k = 1$ C. $k = 4$ D. $k = -4$ E. $k = -3$

Resolução: Efectuando a multiplicação temos $(2+ki)(2+i) = 4 + 2(k+1)i - k$. Este número será imaginário puro se $4 - k = 0 \Longrightarrow k = 4$. Logo, a resposta certa é alternativa **C**.

25. Calculando $\lim \left(\sqrt{n(n-1)} - n\right)$ obtém-se:

A: $\frac{1}{2}$ B: $+\infty$ C: $-\frac{1}{2}$ D: 1   E: $\frac{1}{4}$

Resolução: $\lim\left(\sqrt{n(n-1)}-n\right)=[\infty-\infty]$. Levantando esta indeterminação, temos:

$$\lim\left(\sqrt{n(n-1)}-n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n(n-1)}-n\right)\left(\sqrt{n(n-1)}+n\right)}{\sqrt{n(n-1)}+n}$$
$$=\lim\frac{n(n-1)-n^2}{\sqrt{n^2-n}+n}=\lim\frac{-n}{n\sqrt{1-\frac{1}{n}}+n}=\lim\frac{-n}{2n}=-\frac{1}{2}.$$

Assim, a resposta certa é **C**.

26. Das funções seguintes aquela cuja primitiva é igual a própria função é:

A. $y=\ln x$ B. $y=\sqrt{x}$ C. $y=2^{3x}$ D. $y=e^x$ E. $y=x^3$

Resolução: A primitiva de uma função $f(x)$ é uma função $F(x)$ para a qual $F'(x)=f(x)$. De acordo com o enunciado, pretendemos encontrar a função $f(x)$ tal que $f(x)=F(x)$ ou por outras palavras $F'(x)=F(x)=f(x)$. A única função que tem essa propriedade é $y=e^x$. Logo, a resposta certa é **D**.

27. A solução de $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\geq 3$ é:

A. $\frac{15}{8}\leq x\leq 2$ B. $\frac{15}{8}<x<2$ C. $-2\leq x\leq\frac{15}{8}$ D. $x\leq-\frac{15}{8}$ E. $-2<x\leq-\frac{15}{8}$

Resolução: Para a existência do logarítimo $x+2>0\Longrightarrow x>-2$.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\geq 3\Longrightarrow\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\geq\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3\Longrightarrow x+2\leq\frac{1}{8}\Longrightarrow x\leq-\frac{15}{8}.$$

Combinando com o domínio da expressão temos $x>-2\wedge x\leq-\frac{15}{8}\Longrightarrow -2<x\leq-\frac{15}{8}$. A resposta certa é **E**.

28. A solução de $e^{\sqrt{x}}(1-x)<0$ é:

A: $x<1$ B: $x>1$ C: $0<x<1$ D: $0\leq x<1$ E: $x\leq 1$

Resolução: Para a existência da expressão $x\geq 0$. O sinal da expressão $e^{\sqrt{x}}(1-x)$ depende inteiramente de $(1-x)$ visto que $e^{\sqrt{x}}>0$ em todo o seu domínio. Assim, $e^{\sqrt{x}}(1-x)<0\Leftrightarrow 1-x<0\Longrightarrow x>1$. Combinando com a condição de domínio temos: $x>1$, então, resposta certa é **B**.

29. O produto das raizes de $2^{\sqrt{x^2-7}}=2^3$ é:

A: 16 B: -16 C: -12 D: 1 E: 9

Resolução: Para que a equação tenha sentido,

$$x^2-7\geq 0\Longrightarrow(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})\geq 0\Longrightarrow(x-\sqrt{7}\geq 0\wedge x+\sqrt{7}\geq 0)\vee(x\leq\sqrt{7}\wedge x+\sqrt{7}\leq 0)\Longrightarrow$$

$$(x\geq\sqrt{7}\wedge x\geq\sqrt{7})\vee(x\leq\sqrt{7}\wedge x\leq-\sqrt{7})\Longrightarrow x\geq\sqrt{7}\vee x\leq-\sqrt{7}.$$

Resolvendo a equação dada temos: $2^{\sqrt{x^2-7}}=2^3\Longrightarrow\sqrt{x^2-7}=3\Longrightarrow x^2-7=9\Longrightarrow x^2=16\Longrightarrow x=\pm 4$. Note que $-4<-\sqrt{7}$ e $4>\sqrt{7}$, então as raizes são $x=\pm 4$ e o seu produto é igual a -16. A resposta certa é alternativa **B**.

30. A distância entre $A(2,3)$ e $B(-2,-2)$ é:

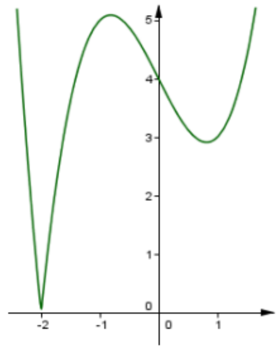
A: 41 B: 5 C: $\sqrt{17}$ D: $\sqrt{41}$ E: 1

Resolução: A distância entre dois pontos $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$ do plano é dada por $d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$, então $d = \sqrt{(-2-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{41}$. Então, a resposta certa é **D**.

31. A primitiva de $x^3 - 2x$ é:

A: $\frac{x^4}{4} - 2x^2$ B: $3x^2 - 2 + c$ C: $3x^2 - 2$ D: $\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} + c$ E: $\frac{x^4}{4} - x^2 + c$

Resolução: A primitiva de $f(x)$ é uma função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ e ela pode ser determinada da seguinte forma $F(x) = \int f(x)dx = \int (x^2 - 2x)dx = \frac{x^4}{4} - x^2 + c$. Assim a resposta é alternativa **E** é correcta.



32. Em relação a função apresentada é falso afirmar que:

A: A função é decrescente em $]-\infty, -2[\cup]-1, 1[$
B: A função tem um ponto de inflexão em $x = 0$
C: A derivada da função é nula em $x = -1$ e $x = 1$
D: Em $]-2, 1[$ a segunda derivada é negativa
E: A função admite um máximo relativo em $x = -1$

Resolução:

- Na altenativa **D** diz-se que em $]-2, 1[$ a segunda derivada é negativa, isso não constitui a verdade pois no intervalo $]0, 1[\subset]-2, 1[$ a segunda derivada é é positiva, visto que ela possui concavidade voltada para cima neste intervalo.

A resposta certa é **D**.

33. A expressão analítica da função representada na figura ao lado é:

A: $y = x^3 - 2x + 4$ B: $y = |x|^3 - 2|x| + 4$ C: $y = |-x^3 - 2x + 4|$
D: $y = |x^3 - 2x + 4|$ E: Nenhuma das anteriores.

Resolução: A função ilustrada no gráfico possui como zero da função $x = -2$ e apenas duas alternativas cujo $x = -2$ é zero, **A** e **D**.
A função tem como pontos críticos $x = -2$, $x = -1$ e $x = 1$. Analisando a função em **A** temos que $y' = 3x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ e não correspondem aos pontos estacionários/crítios do gráfico dado. Então **A** não é correcta, consequentemente **D** também, visto que é módulo da função em **A**. Nenhuma das alternativas de A a D, é correcta. A resposta certa é **E**.

34. PASSE PARA A PERGUNTA SEGUINTE

35. O $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ é:

A: $\frac{3}{2}$ B: $-\frac{3}{2}$ C: $-\frac{1}{2}$ D: $\frac{1}{2}$ E: $\frac{3}{2}$.

Resolução: Temos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{3}{2}.$$

Então, a resposta certa é altenativa **E**.

36. A derivada de $\dfrac{3x}{(2x-1)^2}$ é:

A: $\dfrac{3}{(2x-1)^2}$ B: $-\dfrac{3}{(2x-1)^3}$ C: $-\dfrac{3}{(2x-1)^2}$

D: $\dfrac{3}{(2x-1)^3}$ E: $-\dfrac{3(2x+1)}{(2x-1)^3}$

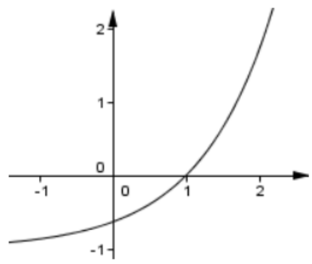
Resolução: Temos:

$$\begin{aligned}\left[\frac{3x}{(2x-1)^2}\right]' &= \frac{(3x)'\cdot(2x-1)^2-3x\cdot[(2x-1)^2]'}{(2x-1)^4}\\ &= \frac{3\cdot(2x-1)^2-3x\cdot 2(2x-1)\cdot(2x-1)'}{(2x-1)^4}\\ &= \frac{3\cdot(2x-1)^2-3x\cdot 2(2x-1)\cdot 2}{(2x-1)^4}\\ &= \frac{6x-3-12x}{(2x-1)^3}\\ &= \frac{-6x-3}{(2x-1)^3}=-\frac{3(2x+1)}{(2x-1)^3}\end{aligned}$$

A resposta certa é **E**.

37. Na figura ao lado está representada a função $y=g(x)$. O domínio da função $f(x)=\sqrt{g(x)}$ é:

A: $[0,+\infty[$ B: $]0,+\infty[$ C: $]-\infty,1[$ D: $[1,+\infty[$ E: $]1,+\infty[$



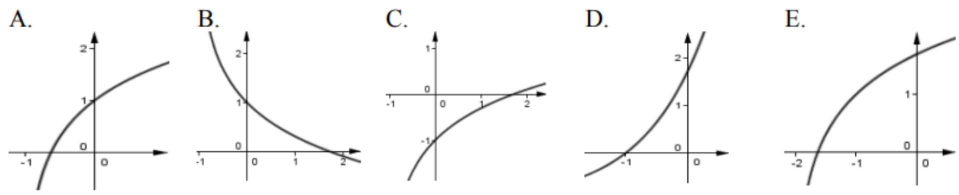
Resolução: Para a existência da raiz quadrada $g(x)\geq 0 \Longrightarrow x\geq 1$. Logo, a resposta certa é **D**. Nas outras alternativas os intervalos possuem valores para os quais a raiz quadrada não tem sentido em $\mathbb{R}$, por exemplo $x=0$ faz parte dos domínios em A, B, C e $f(0)=\sqrt{g(0)}$ e $g(0)<0$, logo $f(0)$ não existe em $\mathbb{R}$. A alternativa E peca por não incluir $x=1$, visto que $f(1)=\sqrt{g(1)}=\sqrt{0}=0$ existe.

38. O valor de $g\left(\frac{1}{2}\right)$ é:

A: $\frac{1}{4}$ B: $-\frac{1}{4}$ C: $\frac{1}{2}$ D: $-\frac{3}{2}$ E: $-\frac{5}{2}$

Resolução: Fazendo leitura ao gráfico apenas podemos concluir que $-1<g(\frac{1}{2})<0$, não tendo assim informação suficiente para determinar o valor $g(x)$ da função nesse ponto. A resposta mais próxima é **B**.

39. O gráfico da função inversa de $y = g(x)$ é:



Resolução: A função dada apresenta aspectos de uma função exponencial crescente tal que $g(1) = 0$ e $g(0) < 0$. Neste caso a sua inversa $g^{-1}(x)$ teria $g^{-1}(0) = 1$ e $\exists\, c < 0 : g^{-1}(c) = 0$. O único gráfico com essas características é o da alternativa **A**.

40. Sabe-se que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Nestas condições é <u>falso</u> afirmar que:
A: A função tem uma assímptota vertical em $x = 2$
B: A função não admite derivada em $x = 2$
C: A função tem limite em $x = 2$
D: A função tem no mínimo um zero
E: A função tem uma assímptota horizontal em $y = 1$

Resolução: Visto que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ então $y = 1$ é assímptota horizontal. Dado que os limites laterais no ponto $x = 2$ são infinitos então $x = 2$ é ponto de descontinuidade da segunda espécie, portanto não é derivável e não tem limite nesse ponto, isto contradiz a afirmação em **C** i.e., **C** é falsa e é a alternativa certa. Visto que pela esquerda de $x = 2$ a funçõ tende a $+\infty$ e pela direita para $-\infty$, então ela possui um zero algures.

41. A solução de $\cos x - sen x = 0$ em $[0, 2\pi]$ é:

A: $x = 0$ B: $x = \frac{\pi}{4}$ C: $x = \frac{\pi}{4} \vee x = \dfrac{3\pi}{4}$ D: $x = \frac{\pi}{4} \vee x = \dfrac{5\pi}{4}$ E: $x = \dfrac{5\pi}{4}$

Resolução: $\cos x - sen x = 0 \Longrightarrow \cos x = sen x \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + +k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Então em $[0, 2\pi]$ temos $x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4}$. Portanto, a resposta certa é alternativa **D**.

• As alternativas B e E simplesmente estão incompletas. As alternativas A e C possuem valores de x que não satisfazem a equação dada, neste caso $x = 0$ e $x = \frac{3\pi}{4}$ não satisfazem a equação.

42. O produto $(x-1)(x^2 + ax + b)$ é igual a $x^3 + x^2 - 5x - b$ quando a e b tomam valores:
A: $a = 2$ e $b = -3$ B: $a = 2$ e $b = -7$ C: $a = 0$ e $b = -5$
D: $a = 0$ e $b = 5$ E: $a = 2$ e $b = -5$

Resolução: Igualando as duas expressões temos:

$$\begin{aligned}
&(x-1)(x^2 + ax + b) = x^3 + x^2 - 5x - b \Longrightarrow\\
&x^3 + (a-1)x^2 + (b-a)x - b = x^3 + x^2 - 5x - b\\
&a - 1 = 1 \Longrightarrow a = 2\\
&b - a = -5 \Longrightarrow b = -3.
\end{aligned}$$

A resposta certa é **A**.

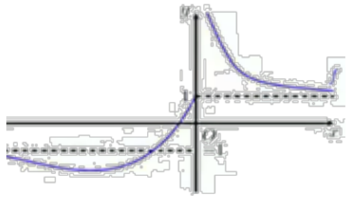
Na figura abaixo está representado o gráfico da função $y = f(x)$. Com base no gráfico responda as questões 44 e 45.

43. Sabendo que $g(x) = \ln x$, o limite $\lim\limits_{x\to 1} f[g(x)]$ é igaul a:

A: -1 B: 0 C: 1 D: $-\frac{1}{2}$ E: $\frac{1}{2}$

Resolução: $\lim\limits_{x\to 1} f[g(x)] = f[g(1)] = f(-\infty) = -1$. Então a resposta certa é **A**.

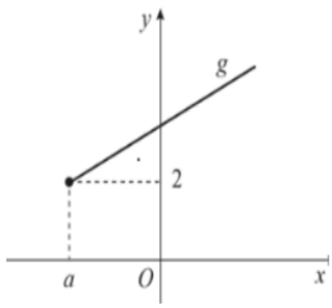
44. Em relação a função $y = f(x)$ reepresentada ao lado é falso afirmar:



A: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$
B: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
C: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -1$
D: $f'(x) \neq 0$ em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
E: $f(x)$ é contínua em $x \neq 0$

Resolução: A alternativa certa é **D** visto que o gráfico cruza a assímptota horizontal $y = -1$ e ainda quando tende para -1 quando $x \to -\infty$. Então algures $]-\infty, 0[$ a função possui extremo e visto que a função é contínua e diferenciável nesse intervalo, então $\exists c \in]-\infty, 0[: f'(c) = 0$.

45. A função $y = \log_3\left(-x - \frac{1}{3}\right)$ e a função representada na figura ao lado tem a mesma ordenada em $x = a$. O valor de a é:



A: $-\frac{26}{3}$ B: $-\frac{28}{3}$ C: $\frac{28}{3}$ D: $\frac{26}{3}$ E: $-\frac{25}{3}$

Resolução: Visto que a função representada no gráfico e $y = \log_3\left(-x - \frac{1}{3}\right)$ tem a mesma ordenada em $x = a$, então $y(a) = \log_3\left(-a - \frac{1}{3}\right) = 2 \Longrightarrow \log_3\left(-a - \frac{1}{3}\right) = \log_3 3^2 \Longrightarrow -a - \frac{1}{3} = 9 \Longrightarrow a = -\frac{1}{3} - 9 = -\frac{28}{3}$. Logo, a resposta certa é **B**.

46. O domínio da função $y = \log_3\left(-x - \frac{1}{3}\right)$ é:

A: $\left]-\infty, -\dfrac{1}{3}\right]$ B: $\left]-\infty, -\dfrac{1}{3}\right[$ C: $\left[-\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$
D: $\left]-\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$ E: $\left]\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$

Resolução: $D_y = \{x \in \mathbb{R} : -x - \dfrac{1}{3} > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < -\dfrac{1}{3}\} = \left]-\infty, -\dfrac{1}{3}\right[$. Deste modo, a resposta certa é a alternativa **B**.

47. A função inversa de $y = \log_3\left(-x - \frac{1}{3}\right)$ é:

A: $y = 3^x - \dfrac{1}{3}$ B: $y = 3^x + \dfrac{1}{3}$ C: $y = -\left(3^x - \dfrac{1}{3}\right)$ D: $y = \left(-3^x - \dfrac{1}{3}\right)^3$ E: $y = -\left(3^x + \dfrac{1}{3}\right)$

Resolução: Uma função possui inversa se for injectiva e sobrejectiva. Sejam $x_1, x_2 \in D_y$, tal que $y(x_1) = y(x_2) \Longrightarrow \log_3\left(-x_1 - \frac{1}{3}\right) = \log_3\left(-x_2 - \frac{1}{3}\right) \Longrightarrow -x_1 - \frac{1}{3} = -x_2 - \frac{1}{3} \Longrightarrow x_1 = x_2$. Logo a função dada é injectiva. O contradomínio da função dada é $CD_y = \mathbb{R}$, então seja $y \in \mathbb{R}$, então $y = \log_3\left(-x - \frac{1}{3}\right) \Longrightarrow -x - \frac{1}{3} = 3^y \Longrightarrow x = -\left(3^y + \frac{1}{3}\right)$, isto mostra que $\forall y \in CD_y, \exists\, x \in D_y : y = y(x)$, então a função dada é sobrejectiva. Então ela possui inversa. Se em $x = -\left(3^y + \dfrac{1}{3}\right)$ trocarmos os papeis de x e y, temos $y^{-}(x) = -\left(3^x + \frac{1}{3}\right)$. Logo, a resposta certa é a alternativa **E**.

48. Considere a sucessão $v_n = \frac{3n-2}{n+1}$, indique a afirmação <u>falsa</u>.

A: $\dfrac{21}{9}$ é termo da sucessão B: $\dfrac{1}{2} \leq v_n \leq 3$ C: $v_5 = \dfrac{13}{6}$
D: $\lim v_n = 3$ E: A sucessão é monótona crescente

Resolução: Note que $\lim v_n = \lim \frac{3n-2}{n+1} = \lim \frac{3n(1-\frac{2}{3n})}{n(1-\frac{1}{n})} = 3$, então ela é limitada e $\left|\frac{3n+1}{n+1}\right| \leq \frac{3n}{n} = 3 \Longrightarrow -3 \leq v_n \leq 3 \Longrightarrow \frac{1}{2} \leq v_n \leq 3$. $v_5 = \frac{3\cdot 5-2}{5+1} = \frac{13}{6}$. Se o número $\frac{21}{9}$ for termo da sucessão, então $\exists\, n : \frac{3n-2}{n+1} = \frac{13}{9} \Longrightarrow 27n - 18 = 13n + 13 \Longrightarrow 14n = 31$, então não existe n natural para o qual $\frac{13}{9}$ é termo da sucessão. A afirmação em **A** é falsa. Por ouro lado temos que

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{3(n+1)-2}{n+2} - \frac{3n-2}{n+1} \\ &= \frac{(3n+1)(n+1) - (3n-2)(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{3n^2+4n+1-(3n^2+4n-4)}{(n+1)(n+2)} = \frac{5}{(n+1)(n+2)} > 0, \end{aligned}$$

então a sucessão é monótona crescente. Assim, a resposta certa é **A**.

49. Numa progressão geométrica $u_1 = -\frac{3}{5}$ e $u_2 = -\frac{2}{5}$. $\lim \frac{1}{u_n}$ é igual a:

A: 1 B: 0 C: $-\infty$ D: 3 E: 2

Resolução: Sendo progressão geométrica temos que $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Longrightarrow q = \dfrac{u_2}{u_1} = -\dfrac{2}{5} \div \left(-\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{2}{3} \Longrightarrow$ $u_n = -\dfrac{3}{5} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$. Então,

$$\lim \frac{1}{u_n} = \lim \frac{1}{-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}} = -\frac{5}{3} \lim \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = -\infty.$$

A resposta certa é **C**.

50. A soma dos primeiros doze termos de uma progressão aritimética de razão 2 é 168. O sexto termo dessa progressão é:

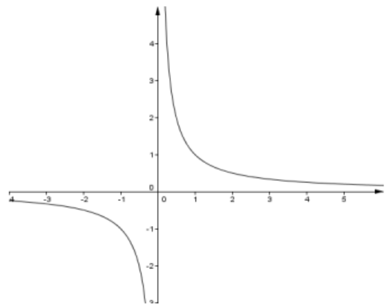
A. 28 B. 12 C. 13 D. 25 E. 22

Rsolução: Sendo uma progressão aritmética, então a soma dos primeiros n termos é dada por $S_n = \dfrac{(u_1+u_n)\cdot n}{2} \Rightarrow \dfrac{12(u_1+u_{12})}{2} = 168 \Rightarrow u_1 + u_{12} = 28 \Rightarrow u_1 + u_1 + 11d = 28 \Longrightarrow 2u_1 + 11\cdot 2 = 28 \Rightarrow u_1 = 3$. Logo, $u_6 = u_1 + 5d = 3 + 5\cdot 2 = 13$. Então, a resposta certa é **C**.

Em relação ao gráfico da função $y = h(x)$ representada em maixo responda as questões 51 a 56

51. A função inversa de $y = h(x)$ é:

A. $h^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ B. $h^{-1}(x) = -\frac{1}{x}$ C. $h^{-1}(x) = x^3$
D. $h^{-1}(x) = \ln x$ E. $h^{-1}(x) = e^x$



Rsolução: A função $h(x)$ tem como assímptotas horizontal $y = 0$ e vertical $x = 0$, e não intersecta os eixos coordenados, então é a função homógrafa $h(x) = \frac{1}{x}$ e esta função é injectiva, visto que para todos x_1, x_2 do seu domínio se $h(x_1) = h(x_2) \Longrightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Longrightarrow x_1 = x_2$. Ela é sobrejectiva, i.e., para todo y do seu contradomínio, $\exists x$ do domínio tal que $y = h(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow x = \frac{1}{y}$. Assim, a função $h(x)$ possui inversa e a sua inversa obtemos por trocar os papeis de x e y na última igualdade, i.e., $h^{-1}(x) = \frac{1}{x}$. Então, a resposta certa é **A**.

52. A primitiva de $y = h(x)$ é:

A. $H(x) = \ln^2 x + c$ B. $H(x) = \ln|x| + c$ C. $H(x) = x^4 + c$
D. $H(x) = e^x + c$ E. $H(x) = e^{-x} + c$

Rsolução: A primitiva de $h(x)$ é uma função $H(x)$ tal que $H'(x) = h(x)$, então $H(x)$ pode-se determinar da seguinte forma $H(x) = \int h(x)dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$. Claramente que a função $\ln x + c$ é primitiva de $\frac{1}{x}$ no caso $x > 0$. Então, a resposta certa é **B**.

53. O $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{h(x)}$ é:
A. 0 B. 1 C. $-\infty$ D. -1 E. $+\infty$

Rsolução: $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0$. Assim, a resposta certa é **A**.

54. O valor de $h(0)$ é:

A. 0 B. $+\infty$ C. $-\infty$ D. -1 E. Não existe

Rsolução: $x = 0$ é assímptota da vertical de $h(x)$, portanto a função não está definida neste ponto, i.e., $h(0)$ não existe. A resposta certa é **E**.

55. É falso afirmar que $y = h(x)$:

A: A função tem descontínudade da segunda espécie em $x = 0$
B: Admite uma derivada em $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
C: É simétrica em relação a origem
D: A função é injectiva
E: $h(x) = h(-x)$

Resolução: A função é injectiva, ímpar e tem descontinuidade da segunda espéciem em $x = 0$, portanto as alternativas A, B, C e D são verdadeiras. Logo, a alternativa certa é **E**.

56. Em $x = -3$ a função $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$:

A: Tem uma assímptota vertical
B: Tem uma assímptota horizontal
C: É descontínua não eliminável
D: É descontínua eliminável
E: $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} = +\infty$

Resolução: Visto que $x = -3$ é ponto rejeitado no domínio de $f(x)$ e

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} = \lim_{x \to -3} (x - 3) = -3,$$

então $x = -3$ é ponto de descontinuidade eliminável. Logo, a resposta certa é **D**.

Exame de Matemática de 2019

Correcção do exame de Matemática de 2019

1. Numa biblioteca A há 10000 livros, entre os quais 8000 escritos em Português. Noutra biblioteca B há-se 12000 livros com a mesma proporção entre o número de livros em Português e o número total. Qual é o número de livros escritos noutras linguagens na biblioteca B?

   A: 4000 B: 2400 C: 2000 D: 1800 E: 3000

   Resolução: A proporção dos livros escritos em português na biblioteca A é $\frac{8000}{10000} = 0,8$. Assim, a proporção de livros escritos em outras línguas é $1 - 0,8 = 0,2$. Deste modo o número de livros escritos em outras línguas na biblioteca B é $0,2 \cdot 12000 = 2400$. Logo, a resposta certa á **B**.

2. Numa escola estudam 203 alunos. Eliminando as unidades, qual é a percentagem do erro relativo desta operação?

   A: 3 B: $2,5$ C: 2 D: $1,5$ E: 1

   Resolução: Eliminando as unidades temos 200 alunos, assim a percentagem do erro relativo é igual à $\frac{203-200}{203} \times 100\% \approx 1,5\%$. A resposta certa é **D**.

3. No mapa de parede de República de Moçambique no canto inferior direito está escrito: Escala $1:1300000$, o que significa que para 1 centímetro no mapa correspondem 1300000 centímetros de distância real. Neste mapa a distância de Beira à Tete mede, em linha recta, cerca de $32,7$ centímetros. Arredondando a resposta a três algarismos significativos, qual é a distância real de Beira à Tete em quilómetros (km)?

   A: $400\,km$ B: $405\,km$ C: $415\,km$ D: $425\,km$ E: $450\,km$

   Solução: Seja x a distância de Beira à Tete em centímetros, então

   $\begin{array}{l} 1\text{———-}1300000 \\ 32,7\text{——}x \end{array} \Longrightarrow x = 32,7 \cdot 1300000 = 42510000\,cm$. Seja y a mesma distância em km, então

   $\begin{array}{l} 1km\text{——-}\ 100000\,cm \\ y\text{———}42510000\,cm \end{array} \Longrightarrow y = \frac{42510000}{100000} = 425,1km \approx 425\,km$. Então, a resposta certa é **D**.

4. Um caderno custa 120 Meticais, o que em seis vezes é mais caro comparando com o preço duma caneta. O aluno comprou quatro cadernos e umas canetas, pagando 600 Meticais. Quantas canetas comprou o aluno?

A: 4 B: 6 C: 8 D: 10 E: 12

Solução: Seja n o número de canetas que o aluno comprou ao preço y por cada caneta. Então $6y = 120 \Longrightarrow y = 20$ e $4 \cdot 120 + n \cdot y = 600 \Longrightarrow n \cdot 20 = 120 \Longrightarrow n = 6$ canetas. A resposta certa é **B**.

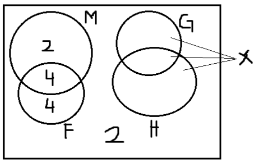
5. Uma solução de concentração de sal de 6% foi obtida misturando a solução A de massa de 3 kg e de concentração de 4% com a solução B de massa de 2 kg. Qual é a massa de sal da solução B?

A: $0,2$ B: $0,6$ C: $0,35$ D: $0,2$ E: $0,18$

Resolução: Seja α a percentagem de sal na solução B, então: $0,04 \cdot 3 + \alpha \cdot 2 = 0,06 \cdot 5 \Longrightarrow 2\alpha = 0,18$. Então, a resposta certa é **E**.

6. Uma turma da escola consta 24 alunos, entre eles seis alunos gostam de Matemática, oito de Física, quatro de Matemática e Física, dois nada gostam e os outros gostam de Geografia ou História. Quantos alunos gostam de Geografia ou História?
A: 4 B: 6 C: 8 D: 10 E: 12

Resolução: Seja x o número de alunos da turma que gostam de Geografia ou História. Representando num diagrama de Venn os dados do exercício temos:



Deste diagrama temos: $2+4+4+2+x = 24 \Longrightarrow x = 12$. Então, a resposta certa é **E**.

7. Um grupo de 5 pessoas querem jogar em volley da praia formando as equipas 2 contra 2 jogadores. Quantos jogos com diferentes jogadores nas equipas podem ser realizados?

A: 10 B: 8 C: 12 D: 20 E: 16

Resolução: Suponhamos que temos os jogadores A, B, C, D, E então podemos formar $C_2^5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = 10$ equipas de forma diferente i.e., AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE. Consideremos a seguinte tabela

	AB	AC	AD	AE	BC	BD	BE	CD	CE	DE
AB										
AC										
AD										
AE										
BC			$\surd$	$\surd$						
BD		$\surd$		$\surd$						
BE		$\surd$	$\surd$							
CD	$\surd$			$\surd$			$\surd$			
CE	$\surd$		$\surd$		$\surd$	$\surd$				
DE	$\surd$	$\surd$				$\surd$				

Da tabela acima vemos que temos 16 jogos com jogadores diferentes. A resposta certa é **E**.

8. Que ponto do plano cartesiano fica mais próximo à origem do sistema cartesiano, o ponto $A(-2,5)$, $B(-6,-1)$ ou o ponto médio C do segmento AB?

A: A B: B C: C D: tanto A como B E: Nenhuma das anteriores

Resolução: A distância entre dois pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) é dada por $d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$, então a distância de A à origem é
$d_A = \sqrt{(0-(-2)^2 + (0-5)^2)} = \sqrt{29}$ e a distância de B à origem é $d_B = \sqrt{(0-(-6)^2 + (0-(-1))^2)} = \sqrt{37}$. Por outro lado, o ponto médio é $C = \frac{A+B}{2} = (-4, 2)$, logo a distância de C à origem é $d_B = \sqrt{(0-(-4)^2 + (0-(2))^2)} = \sqrt{20}$. Fica mais próximo da origem o ponto cuja é menor possível, então, a resposta certa é **C**.

9.

10. PASSE PARA A PERGUNTA SEGUINTE

11. Quantos jogos m de um campeonato de xadrez devem ser realizados entre 20 pessoas e qual é a probabilidade p de uma pessoa ser vencedora desta prova?

A: $m = 10$; $p = \frac{1}{10}$ B: $m = 190$; $p = \dfrac{1}{20}$ C: $m = 400$; $p = \frac{1}{40}$ D: $m = 200$; $p = \frac{1}{20}$ E: $m = 120$; $p = \frac{1}{40}$

Resolução: O número de jogos a realizar são $C_2^{20} = \frac{20!}{(20-2)!2!} = \frac{20\cdot19\cdot18!}{18!\cdot2!} = 190$ e a probabilidade de uma pessoa sair vencedora (número de casos favoráveis é 20) é $p = \frac{1}{20}$ onde 20 é o número de casos possíveis. Portanto, a resposta certa é **B**.

12. Simplificando a expressão com números complexos $\dfrac{(1+2i)^2(1-2i)^2}{|3+4i|\cdot|3-4i|}$ obtém-se:

A: $\dfrac{5}{16}$ B: $\dfrac{9}{7}$ C: $-\dfrac{5}{16}$ D: 1 E. -1

Resolução: Note que o conjugado de $a+bi$ é $a-bi$, $(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$ e $|(a+bi)|\cdot|(a-bi)| = |(a+bi)(a-bi)| = a^2+b^2$, então

$$\frac{(1+2i)^2\cdot(1-2i)^2}{|3+4i|\cdot|3-4i|} = \frac{[(1+2i)(1-2i)]^2}{|(3+4i)\cdot(3-4i)|} = \frac{(1^2+2^2)^2}{3^2+4^2} = \frac{25}{25} = 1.$$ A resposta certa é **D**.

13. O domínio da expressão $\dfrac{x^2-9}{(x+5)(x-3)}$ é:

A: $x \in \mathbb{R}$
B: $x \in]-\infty, -5] \cup [3, +\infty[$
C: $x \in]-\infty, -5[\cup]-5, +\infty[$
D: $x \in]-\infty, -5] \cup [-5, 3[\cup[-3, +\infty[$
E: $x \in]-\infty, -5[\cup]-5, 3[\cup]-3, +\infty[$

Resolução : Para a existência da expressão $(x+5)(x-3) \neq 0 \Longrightarrow x \neq -5 \wedge x \neq 3$, então o domínio da expressão dada é $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 3\} =]-\infty, -5[\cup]-5, 3[\cup]3, +\infty[$. Logo, a resposta certa é **E**.

Note que as alternativas A, B e D contém por exemplo $x = 5$ para o qual a expressão não existe neste ponto, por isso não são correctas. A alternativa C possui está incompleta i.e., ela não contém a parte $]-5; 3[$ do domínio, com isso não é correcta.

14. Duas empresas alugam camiões. A Empresa A necessita de um depósito de 150000 Meticais e o pagamento de 5000 Meticais por um quilómetro, posteriormente. A Empresa B necessita de um depósito de 100000 Meticais e o pagamento de 7000 Meticais por um quilómetro, posteriormente. Para qual milhagem o pagamento de alugar camiões é o mesmo?

    A: 100 B: 75 C: 50 D: 25 E: 10

    Resolução : A função pagamento na empresa A é $P_A(x) = 150000 + 5000x$ e na empresa B é $P_B(x) = 100000 + 7000x$, onde x é a distância percorrida em quilómetros. Desta forma, os pagamentos serão iguais se $P_A(x) = P_B(x) \Longrightarrow 150000 + 5000x = 100000 + 7000x \Longrightarrow 2000x = 50000 \Longrightarrow x = 25$. Então, a resposta certa é **D**.

15. Considere o sistema $\begin{cases} \lambda x + 2y &= 4 + \lambda \\ 2x + \lambda y &= -2 \end{cases}$. Segundo o parâmetro λ, a afirmação verdadeira é:

    A: se $\lambda = 2$ o sistema tem uma e só única solução ;
    B: se $\lambda = -2$ o sistema não tem solução ;
    C: se $\lambda \neq 2$ e $\lambda \neq -2$ o sistema tem mais que uma solução ;
    D: se $\lambda \neq 2$ e $\lambda \neq -2$ o sistema tem uma e só única solução ;
    E: se $\lambda = 2$ o sistema tem mais que uma solução ;

    Resolução : Aplicando o método de Crammer temos

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 4+\lambda & 2 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(4+\lambda) + 4 = \lambda^2 + 4\lambda 4;$$
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \lambda & 4+\lambda \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2\lambda - 8 - 2\lambda = -4\lambda - 8$$

O sistema terá única soluão se $\Delta \neq 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 4 \neq 0 \Longrightarrow \lambda \neq \pm 2$. Logo, a resposta certa é **D**.

- Caso $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$ e $\Delta = 0$, então o sistema terá várias soluções

- Caso $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$ e $\Delta = 0$, então o sistema não tem soluções

16. Para que o produto da matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ pelo vector $\begin{pmatrix} x+2 \\ y \end{pmatrix}$ seja igual ao vector $\begin{pmatrix} 3x - y \\ y + 3 \end{pmatrix}$ os números x e y devem ser iguais, suficientemente aos valores:

    A: 4 e 0 B: 3 e 0 C: 0 e 4 D: 2 e 2 E: 3 e 1

    Reolução : Temos, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ y + 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x + 2 + 3y \\ 0 \cdot (x+2) + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ y + 3 \end{pmatrix}$, assim obtemos o seguinte sistema de equações lineares $\begin{cases} x + 3y + 2 = 3x - y \\ 4y = y + 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -x + 2y = -1 \\ y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

    Desta forma, a resposta certa é **E**. Os valores em outras alternativas não satisfazem o sistema acima resolvido.

17. Resolvendo a equação $9x^2 + 6x + 1 = 0$ obtém-se:

A: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{3}$ B: $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$ C: $x_1 = -\dfrac{1}{3}$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$ D: $x_1 = \dfrac{1}{3}$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$ E: $x_1 = -\dfrac{1}{3}$, $x_2 = 0$

Resolução: Usando a fórmula resolvente temos: $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$, então $x_1 = x_2 = \dfrac{-6}{2 \cdot 9} = -\dfrac{1}{3}$. Logo, a resposta certa é **B**. As outras alternativas não estão correctas porque possuem valores de x que não satisfazem a equação dada, por exemplo para $x = 0$ temos $9 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 + 1 = 1 \neq 0$, por isso A e E não são correctas.

18. Resolvendo a equação $|1 - x^2| = -1$ a resposta é:

A: $-\sqrt{2}$ B: $\sqrt{2}$ C: 0 D: 2 E: $\emptyset$

Resolução : Sabe-se que o módulo de um número é sempre não negativo, logo não existe valor de x para o qual $|1 - x^2| = -1 < 0$. Logo, a resposta certa é **E**.

19. Os zeros do polinómio $P(x) = x^2 + 2ax - 4$ são:

A: $x_{1,2} = \pm\sqrt{a^2 + 4}$ B: $x_{1,2} = \pm(a - 2)$ C: $x_{1,2} = \pm\sqrt{a + 1}$ D: $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 + 4}$
E: $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + 4}$

Resolução : Usando a fórmula resolvente temos: $\Delta = (2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 4(a^2 + 4) \Longrightarrow x_{1,2} = \dfrac{-2a \pm \sqrt{4(a^2 + 4)}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2 + 4}$. Logo, a resposta certa é **E**. As outras alternativas simplesmente não satisfazem a equação dada.

20. Resolvendo a inequação $2x^2 - x - 1 > 0$ obtemos:

A: $x \in]-\infty; +\infty[$ B: $x \in]-\infty; -1] \cup]0; \infty[$ C: $x \in]-\infty; -0,5] \cup]1; \infty[$ D: $[0,5; 1]$ E: $x \in]-\infty; -1] \cup]0,5; \infty[$

Resolução: Primeiramente consideremos a equção $2x^2 - x - 1 = 0 \Longrightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 \Longrightarrow x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} \Longrightarrow x_1 = -\dfrac{1}{2} \wedge x_2 = 1$. Visto que o coeficiente de x^2 é positivo, então a parábola tem concavidade voltada para cima, então a solução da inequação $2x^2 - x - 1 > 0$ é $x \in] - \infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[=] - \infty; -\dfrac{1}{2}] \cup]1; +\infty[$. Logo, a resposta certa é **C**.

21. PASSE PARA A PERGUNTA SEGUINTE

22. Resolvendo a inequação $\sqrt{4 - x} < \sqrt{x - 2}$ a resposta é:

A. $] - 2, 2[$ B. $[2, 4]$ C. $]2, 3]$ D. $[3, 4]$ E. $]3, 4]$

Resolução: Para a existência das raizes quadradas envolvidas temos $4 - x \geq 0 \wedge x - 2 \geq 0 \Longrightarrow 2 \leq x \leq 4$. Resolvendo a inequação dada temos,

$$\sqrt{4 - x} < \sqrt{x - 2} \Longrightarrow |4 - x| < |x - 2| \Longrightarrow 4 - x < x - 2 \wedge 4 - x > -(x - 2)$$

$x > 3 \wedge 4 > 2 \Longrightarrow x > 3$. Combinando com as condições de domínio i.e., $2 \leq x \leq 4 \wedge x > 3 \Longrightarrow 3 < x \leq 4$. Logo, a resposta certa é **E**.

23. Resolvendo a equação $4^x - 2^{x+1} + 1 = 0$ o resultado é:

A. $x = -1$ B. $x = 1$ C. $x = 0$ D. $x = -2$ E. $x = 2$

Resolução: Seja $2^x = y$, então $4^x + 2^{x+1} = 1 \Longrightarrow (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 1 = 0 \Longrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Longrightarrow (y-1)^2 = 0 \Longrightarrow y = 1 \Longrightarrow 2^x = 1 \Longrightarrow 2^x = 2^0 \Longrightarrow x = 0$. A resposta certa é **C**. As outras alternativas não estão correctas pois substituindo na equação não será igual a zero, por exemplo, para $x = 1 \Longrightarrow 4^1 - 2^{1+1} + 1 = 1 \neq 0$, por isso B não está certa.

24. Resolvendo a inequação $\log_3(x^2 - 1) \leq 1$ a resposta é:

A. $[-2, 2]$ B. $[-2, 0] \cup [1, 2]$ C. $]-1, 1[\cup[2, +\infty[$ D. $]-1, 1[$ E. $[-2, -1[\cup]1, 2]$

Resolução: Para a existência do logarítimo

$$x^2 - 1 > 0 \Longrightarrow (x+1)(x-1) > 0 \Longrightarrow$$
$$(x+1 > 0 \wedge x - 1 > 0) \vee (x + 1 < 0 \wedge x - 1 < 0) \Longrightarrow (x > 1) \vee (x < -1).$$

Resolvendo a inequação dada temos

$$\log_3(x^2 - 1) \leq 1 \Longrightarrow \log_3(x^2 - 1) \leq \log_3 3 \Longrightarrow x^2 - 1 \leq 3 \Longrightarrow x^2 - 4 \leq \Longrightarrow$$
$$(x+2)(x-2) \leq 0 \Longrightarrow (x + 2 \leq 0 \wedge x - 2 \geq 0) \vee (x + 2 \geq 0 \wedge x - 2 \leq 0)$$
$$\Longrightarrow \emptyset \vee -2 \leq x \leq 2 \Longrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

Combinando com as condições de domínio i.e., temos

$$(x < -1 \vee x > 2) \wedge -2 \leq x \leq 2 \Longrightarrow -1 < x \leq -2 \ \vee \ 1 < x \leq 2.$$

Logo, a resposta certa é alternativa **E**.

25. As recta $y = 3x - 2$ e $y = kx + 1$ são perpendiculares quando:

A: $k = \frac{1}{2}$ B: $k = -\frac{1}{3}$ C: 3 D: $k = 1$ E: $k = -\frac{1}{2}$

Resolução: Duas rectas são perpendiculares se os seus declives são inversamente proporcionais com constante de proporcionalidada igual a -1, i.e., se $k = -\frac{1}{3}$, visto que o coefiente angular da primeira recta é igual a 3. Assim, a resposta certa é **B**.

26. As rectas $y = 2x + q$ e $y = px + 7$ não tem algum ponto em comum. Quais são p e q?

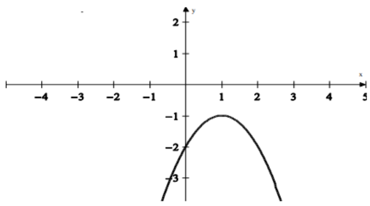
A. $p = 2$ e $q = 7$ B. $p = 2$ e $q \neq 7$ C. $p \neq 2$ e $q = 7$ D. $p \neq 2$ e $q \neq 7$ E. A Nenhuma das anteriores

Resolução: Duas rectas não possuem algum ponto em comum quando forem paralelas e não coincidentes e serão paralelas quando tem o mesmo declive, i.e., $p = 2$ e $q \neq 7$. Logo, a resposta certa é **B**.

27. Um par de funções, $y = f(x)$ e sua inversa $y = f^{-1}(x)$ definidas nos seus domínios é:
A. $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ B. $y = e^x$ e $y = \ln x$ C. $x = y^2$ e $y = \sqrt{x}$
D. $y = sen\, x$ e $y = \cos x$ E. $y = sen\, x$ e $y = sectx$

Resolução: Uma função admite inversa se ela for bijectiva i.e., injectiva e sobrejectiva. A função em A não é injectiva no seu domínio pois $f(-x) = f(x)$, portanto ela não possui inversa. A expressão $x = y^2$ não é funão, pois uma função $f(x)$ é uma aplicação para aqual, cada valor de x do seu domínio, existe apena um y do conjunto de chegada, tal que $y = f(x)$ e a expressão em alusão não satisfaz esta definição, por exemplo, para $x = 1 \Longrightarrow 1 = y^2 \Longrightarrow y = \pm 1$. Para as funções em D e E tem como inversa $y = arcsenx$ e não as funões apresentadas. Todas essas alternativas anteriormente descritas não são correcta pelos motivos indicados. A função $y = e^x$ em B é injectiva pois $\forall\, x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $e^{x_1} = e^{x_2} \Longrightarrow x_1 = x_2$ e $\forall\, y \in \mathbb{R}^+$ temos $y = e^x \Longrightarrow x = \ln y \in \mathbb{R}$ o que quer dizer que é sobrejectiva. Logo, possui inversa e a inversa é obtida invertendo os papeis na última igaldade, i.e. $f^{-1}(x) = \ln x$. Deste modo, a resposta certa é **B**.

28. A parábola cujo gráfico está representado na figura tem a equação :



A: $y = (x-1)^2 - 1$ B: $y = (x-1)^2 + 1$ C: $y = -(x+1)^2 + 1$
D: $y = -(x-1)^2 - 1$ E: $y = -(x+1)^2 - 1$

Resolução: A parábola tem como vértice $V(1, -1)$ e passa pelo ponto $P(0, -2)$ e a sua equação pode ser obtida pela fórmula $y = a(x - x_v)^2 + y_v \Longrightarrow y = a(x-1)^2 - 1$. No ponto P temos $-2 = a(0-1)^2 - 1 \Longrightarrow a = -1$. Deste modo, a expressão analítica da função será $y = -(x-1)^2 - 1$. Logo, a resposta certa é **D**.

• As alternativas A e B simplesmente são incorrectas visto que as suas expressões são de parábolas com concavidade voltada para cima. Na alternativa C temos $x_v = -1$ enquanto que em E temos $y_v = 1$, no entanto os dois casos não condizem com o descrito no gráfico.

29. PASSE PARA A PERGUNTA SEGUINTE

30. O número de pontos de intersecção dos gráficos das funções $y = sen2x$ e $y = tgx$ no intervalo $]0, 2\pi[$ é igual a

A: 7 B: 6 C: 5 D: 3 E: 2

Resolução: Os gráficos das duas funções intersectam-se nos pontos em que $sen2x = tgx \Longrightarrow 2senx\cos x = \frac{senx}{\cos x} \Longrightarrow sen\,x\cos^2 x = sen\,x \Longrightarrow senx(2\cos^2 x - 1) = 0 \Longrightarrow senx = 0 \vee \cos^2 x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = k\pi \vee \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow x = k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{4} + m\pi\ k,\, m \in \mathbb{Z}$. No intervalo $]0, 2\pi[$ temos $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}\pi$, π, $\frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$. A resposta certa é alternativa **C**.

31. Simplificando a expressão $\dfrac{senx}{1+\cos x} + \dfrac{1+\cos x}{senx}$ obtém-se:

A: 2 B: $\frac{2}{\cos x}$ C: $\frac{\cos x}{2}$ D: $\frac{2}{senx}$ E: $\cos^2 x$

Resolução: Simplificando dentro do seu domínio i.e., quando $1 + cosx \neq 0 \wedge senx \neq 0$, temos

$$\frac{senx}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{senx} = \frac{sen^2x + (1+\cos x)^2}{senx(1+\cos x)} = \frac{sen^2x + 1 + 2\cos x + sen^2x}{senx(1+\cos x)}$$
$$= \frac{2 + 2\cos x}{senx(1+\cos x)} = \frac{2(1+\cos x)}{senx(1+\cos x)} = \frac{2}{senx}.$$ Então, a resposta certa é **D**.

32. A função $f(x)$ está definida e contínua num segmento $[a,b]$ e admite $f'(x) > 0$ em $]a,b[$. Então $f(x)$ em $]a,b[$ é:

A: Monótona B: Decrescente C: Não é monótona D: Não é limitada E: $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$

Resolução: O sinal da derivada de uma função num determinado intervalo está directamente ligado a monotonia da função , neste caso Se $f'(x) < 0$ em $]a,b[$ então a função é monótona (decrescente) e se $f'(x) > 0$ em $]a,b[$ (que é o caso do presente exercício) então a função é monótona (crescente). Logo a resposta certa é **A**.

33. A função $f(x)$ está definida e contínua num segmento $[a,b]$ e admite $f'(x) < 0$ em $]a,b[$. Então $f(x)$ em $]a,b[$:

A: Não monótona B: Crescente C: Não é limitada
D: É decrescente E: $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$

Resolução: Da explicação do exercício anterior temos que se $f'(x) < 0$ em $]a,b[$ então a função é monótona decrescente, logo a resposta certa é **D**.

34. O gráfico da função cuja $f'(x) = 2$ é:

A: Uma recta
B: Uma hipérbole
C: Uma parébola da 2^a ordem com ramos virados para cima
D: Uma parébola da 2^a ordem com ramos virados para baixo
E: Uma parébola da 3^a ordem .

Resolução: Se $f'(x) = 2 \Longrightarrow f(x) = \int 2dx = 2x + c$ que é equação de uma recta. Logo, a resposta certa é **A**.

35. O ponto do gráfico da função $y = \sqrt{x}$ onde a tangente à esta curva tem equação $y = x + b$, satisfazendo o valor do parêmetro indicado b, é:

A: $(0,0)$, se $b = 0$ B: $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$, se $b = \dfrac{3}{4}$ C: $(-4,2)$, se $b = 6$

D: $(1,1)$, se $b = 2$ E: $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, se $b = \dfrac{1}{4}$

Resolução: O declive da recta tangente ao gráfico da função $y = \sqrt{x}$ no ponto em causa é igual a 1, i.e., $(\sqrt{x})'|_{x_0} = 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}} = 1 \Longrightarrow x_0 = \dfrac{1}{4}$. Assim, $y_0 = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$. Visto que a função $y = \sqrt{x}$ e $y = x + b$ são iguais, temos $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} + b \Longrightarrow b = \dfrac{1}{4}$. Logo, a resposta certa é **E**.

36. O limite da expressão $\dfrac{x^3+1}{x+1}$ quando $x \to -1$ é:

A: Não existe B: 0 C: 1 D: 2 E: 3

Resolução: Temos: $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to 1}(x^2 - x + 1) = 3$. Então, a resposta certa é altenativa **E**.

37. O $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ é:

A: ∞ B: 0 C: $-\infty$ D: e E: Não existe

Resolução: Note que a função $\frac{1}{x}$ comporta-se de forma diferente à esquerda e a direita de zero, i.e.,

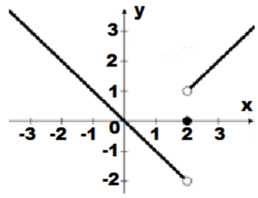
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \text{ e } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

então

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0 \text{ e } \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty.$$

Logo não existe o $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$. A resposta certa é **E**.

38. Na figura está representada parte do gráfico de uma função $f(x)$ definida em $\mathbb{R}$. O grupo das afirmações cerdadeiras é:



A: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$
B: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ não existe
C: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$
D: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ não existe
E: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$

Resolução: Fazendo leitura no gráfico temos $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$. Logo, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, logo $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ não existe. A resposta certa é **B**.

• Alternativa A não está certa porque $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq -1 \neq f(2) = 0$ e de um modo similar mostramos que as alternativas C, D e E não são correctas.

39. A derivada da função $\dfrac{1+\cos x}{senx}$ é:

A: $\dfrac{1}{1+tgx}$ B: $\dfrac{1}{\cos x - 1}$ C: $\dfrac{1-senx}{\cos x}$ D: $-\dfrac{1+\cos x}{sen^2 x}$ E: $\dfrac{senx}{1+\cos x}$

Resolução: Temos:

$$\left(\frac{1+\cos x}{senx}\right)' = \frac{(1+\cos x)' senx - (senx)'(1+\cos x)}{sen^2 x} = \frac{-sen^2 x - \cos x(1+\cos x)}{sen^2 x}$$
$$= \frac{sen^2 x - \cos x - \cos^2 x}{sen^2 x} = \frac{-1-\cos x}{sen^2 x} = -\frac{1+\cos x}{sen^2 x}.$$

Logo, a resposta certa é **D**.

40. Compare as velocidades $v_1(t)$ e $v_2(t)$ de movimento de dois pontos materiais para o instante do tempo $t = \dfrac{\pi^2}{16}$, se as leis de movimento destes pontos são definidas pelas equações $S_1(t) = sen\sqrt{t}$ e $S_2(t) = sen\sqrt{\dfrac{t}{2}}$. Então,

A: $v_1 = v_2$ B: $v_1 > v_2$ C: $v_1 < v_2$ D: v_1 e v_2 são não comparáveis E: Nenhuma das anteriores

Resolução: A velocidade de num ponto material no tempo t_0 é igual a derivada da função deslocamento em relação ao tempo neste ponto, então ,

$$v_1(t) = S_1'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \cos\sqrt{t} \text{ e } v_2(t) = S_2'(t) = \frac{1}{4\sqrt{\frac{t}{2}}} \cdot \cos\sqrt{\frac{t}{2}}$$

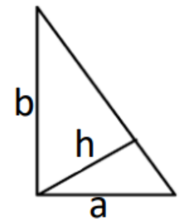
Logo,

$$v_1\left(\frac{\pi^2}{16}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{16}}}\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{16}}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\pi};$$

$$v_2\left(\frac{\pi^2}{16}\right)=\frac{1}{4\sqrt{\frac{\frac{\pi^2}{16}}{2}}}\cdot\cos\sqrt{\frac{\frac{\pi^2}{16}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right).$$

Visto que $\cos x\leq 1,\ \forall x$ então $v_1\left(\frac{\pi^2}{16}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}>v_2\left(\frac{\pi^2}{16}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)$. Logo, a resposta certa é **B**.

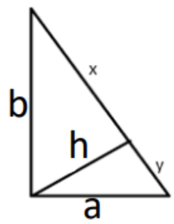
41. Qual é a medida da altura h do triângulo rectângulo de catetos a e b?



A: $h=\frac{b}{2}$ B: $h=\frac{ab}{2}$ C: $h=\frac{a^2+b^2}{ab}$

D: $h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ E: $h=\sqrt{\frac{ab}{a^2+b^2}}$

Resolução: Sejam x e y as medidas ilustradas na figura ao lado, então $x+y=c$ tal que pelo teorema de Pitágora temos $c^2=(x+y)^2=a^2+b^2\Longrightarrow x+y=\sqrt{a2+b^2}$. Por outro lado temos que $x^2+h^2=b^2\wedge h^2+y^2=a^2$. Desta forma temos o seguinte sistema de equações



$$\begin{cases}a^2+b^2=(x+y)^2\\ x^2+h^2=b^2\\ h^2+y^2=a^2\end{cases}$$

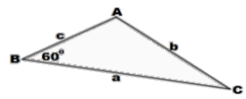
Somando as duas últimas equações temos $x^2+y^2+2h^2=a^2+b^2$ e da primeira equação temos $x^2+y^2+2h^2=(x+y)^2=x^2+y^2+2xy\Longrightarrow h^2=x.y$ Das duas últimas equações do sistema temos

$$\begin{cases}x^2+xy=b^2\\ xy+y^2=a^2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x(x+y)=b^2\\ y(x+y)=a^2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\sqrt{a^2+b^2}=b^2\\ y\sqrt{a^2+b^2}=a^2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ y=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$$

$$\text{Logo, } h^2=xy=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\Longrightarrow h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Então , a resposta certa é **D**.

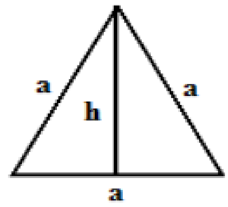
42. No $\triangle ABC$ o lado $a=6cm$, o lado $c=3cm$, o ângulo $\angle B=60^o$. A medida do lado b é igual à:



A: 5 B: $5\sqrt{3}$ C: 4 D: $3\sqrt{3}$ E: $\sqrt{3}$

Resolução: Usando o teorema dos cossenos temos $b^2=a^2+c^2-2a\cdot b\cdot\cos\angle B\Longrightarrow b^2=6^2+3^3-2\cdot6\cdot3\cos 60^o$ $\Longrightarrow b^2=45-36\cdot\frac{1}{2}\Longrightarrow b^2=27\Longrightarrow b=3\sqrt{3}$. A resposta certa é alternativa **D**.

43. Em quantas vezes aumentará a medida de altura h de um triângulo equilátero se o seu perímetro será aumentado em seis vezes, de modo que o triângulo resultante também seja equilátero?



A: 3 B: 6 C: 12 D: 2 E: 4

Resolução: Sejam h_1 a altura do triângulo resultante após o aumento do perímetro, P e $P_1 = P + 6P = 7P$ os perímetros dos triângulos inicial e após o aumento, reespectivamente. Visto que o triângulo resultante também é equilátero, então os dois triângulos são semelhantes, então

$$\frac{h_1}{h} = \frac{P_1}{P} \Longrightarrow \frac{h_1}{h} = \frac{7P}{P} = 7 \Longrightarrow h_1 = 7h = h + 6h,$$

o que quer dizer que a altura aumentará em 6 vezes. Logo, a resposta certa é alternativa **B**.

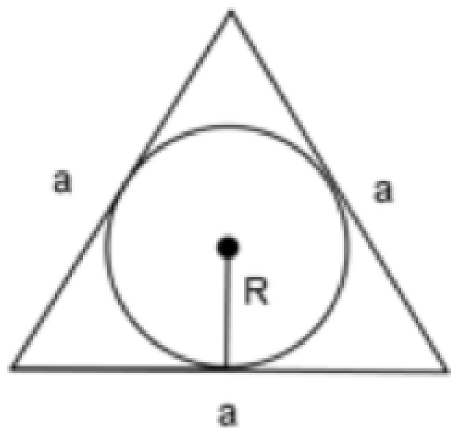
44. Sejam um paralelogramo e um rectângulo cujas bases e alturas são iguais. Qual destas afirmações é verdadeira?

A. O perímetro e a área do paralelogramo são, correspondentemente maiores do que os do rectângulo
B. O perímetro e a área do rectângulo são, correspondentemente maiores do que os do paralelogramo
C. As áreas destas figuras são iguais, mas os perímetros não
D. Os perímetros destas figuras são iguais, mas as áreas não
E. Os perímetros e as áreas destas figuras são, suficientemente iguais

Resolução: Consideremos a seguinte figura:

Vemos que as figuras dada possuem áreas iguais a $b \cdot h$, por isso A, B, D e E não são verdadeiras. Notemos que $L > h$, logo o perímetro do paralelogramo é maior do que o perímetro do rectângulo. Deste modo, a resposta certa é **C**.

45. Qual é o raio R de um círculo inscrito num trińgulo equilátero de lado a?

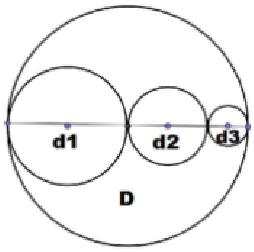


A: $R = \frac{a}{2}$ B: $R = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ C: $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$
D: $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ E: $R = \frac{a}{3}$

Com apoio do Fundo de Desenvolvimento Instuticional

Resolução: O raio de uma circunferência inscrita num triângulo equilátero é igual a $\frac{1}{3}h$ onde h é altura do triángulo e $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} \Longrightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Então, $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Logo, a resposta certa é **C**.

46. Os diâmetros de três círculos inscritos num círculo de diâmetro D satisfaçam às razões e a igualdade seguintes: $d_1 : d_2 : d_3 = 3 : 2 : 1$ e $d_1 + d_2 + d_3 = D$. Quais são as razões das áreas dos círculos inscritos?



A: 3 : 2 : 1 B: 9 : 4 : 1 C: 18 : 2 : 1 D: 1 : 2/3 : 1/3 E: 6 : 3 : 1

Resolução: Usando as razões dadas temos:

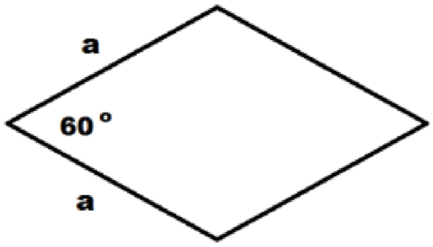
$$A_1 = \pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = \frac{\pi d_1^2}{4}, \quad A_2 = \pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \frac{\pi d_2^2}{4} \text{ e } A_3 = \pi\left(\frac{d_3}{2}\right)^2 = \frac{\pi d_3^2}{4}.$$

Deste modo,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{\pi d_1^2}{4}}{\frac{\pi d_2^2}{4}} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}, \quad \frac{A_2}{A_3} = \frac{\frac{\pi d_2^2}{4}}{\frac{\pi d_3^2}{4}} = \left(\frac{d_2}{d_3}\right)^2 = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = \frac{4}{1},$$

assim temos as seguintes razões $9 : 4 : 1$. Logo, a resposta certa é **B**.

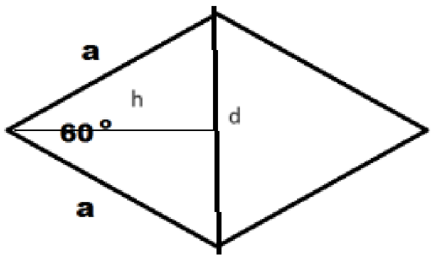
47. Seja losango de lado a e ângulo agudo 60^o. Qual deve ser raio R de um círculo com a mesma área?



A: $R = a$ B: $R = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ C: $R = \frac{a\pi\sqrt{3}}{2}$ D: $R = a \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\pi}}$ E: $R = \frac{a}{2}$

Resolução: Seja d a diagonal oposta ao ângulo dado, então pelo teorema dos cossenos temos:

$$d^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos 60^o = 2a^2 - 2a^2 \cdot \frac{1}{2} = a^2 \Longrightarrow d = a,$$



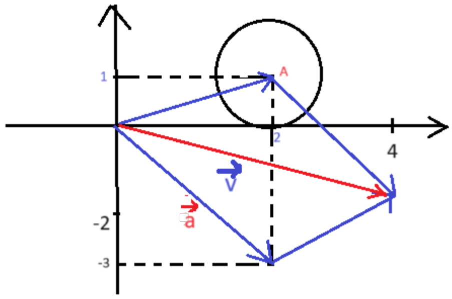
Logo, a diagonal divide o losango em dois triângulos equiláteros. A altura h divide $b = a$ em dois segmentos iguais. Assim, pelo teorema de pitágoras temos $h^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} \Longrightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, deste modo,

$$A_\Diamond = 2A_\triangle = 2 \cdot \frac{d \cdot h}{2} = a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Assim, a área do círculo é $A_\circ = \pi R^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow R = \sqrt{\frac{a^2\sqrt{3}}{2\pi}} = a\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\pi}}$. Logo, a resposta certa é a alternativa **D**.

48. Uma circunferência de raio R centrada no ponto A(2,1) é deslocada segundo o vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Qual é a equaão da circunferência em posição nova no mesmo sistema de coordenadas?

A: $(x+2)^2 + (x-3)^2 = R^2$ B: $(x+2)^2 + (x+1)^2 = R^2$ C: $(x-4)^2 + (x+2)^2 = R^2$
D: $(x-2)^2 + (x-1)^2 = R^2$ E: $(x+4)^2 + (x-2)^2 = R^2$



Resolução: As novas coordenadas do centro da circunfêrencia são dadas pela soma do vector $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e o vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ que é o vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ como ilustra a figura ao lado. Assim, a equação da circunferência na nova posição é $(x-4)^2+(x+2)^2 = R^2$. Logo, a resposta correcta é **B**.

49. As fórmulas que relacionam as coordenadas (x, y), $(x,\, y \in \mathbb{R})$ de um sistema cartesiano com ascoordenadas $(\rho\,,\, \varphi)$, $(\rho \geq 0,\, \varphi \in [0, 2\pi])$, do sistema polar, (as origens destes coincidem e o eixo das abcissas do sistema cartesiano coincide com o eixo polar ρ do sistema polar), são $x = \rho \cos\varphi$ e $y = \rho sen\varphi$. Exprima a equação de uma circunferência de raio R, centrada na origem do sistema cartesiano, na forma $\rho = \rho(\varphi)$.

A: $\rho = R$ B: $\rho = 2\pi R$ C: $\rho = \pi R^2$ D: $\rho = 2\pi$ E: $\rho = \pi R$

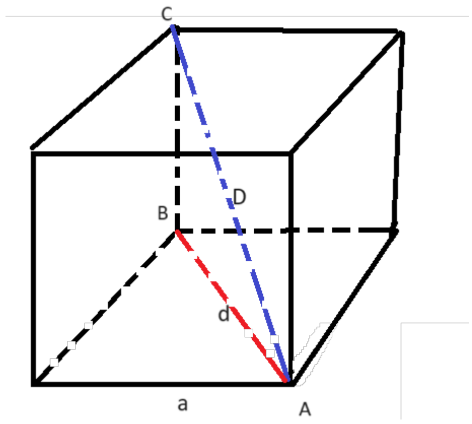
Resolução: A equação da circunferência de centro (x_0, y_0) e raio R é dada por $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$. Visto que no nosso caso a circunferência está centrada na origem, então ela toma a forma $x^2 + y^2 = R^2$. Subistituindo x e y pelas expressões dadas temos:

$$(\rho \cos\varphi)^2 + (\rho sen\varphi)^2 = R^2 \Longrightarrow \rho^2(\cos^2\varphi + sen^2\varphi) = R^2 \Longrightarrow \rho = R.$$

Assim, a resposta certa é **A**.

50. Comprimento de diagonal D de um cubo de lado de comprimento a é igual:

A: $D = 3a$ B: $D = a\sqrt{3}$ C: $D = a\sqrt{2}$ D: $D = 2a$ E: $D = 5a$



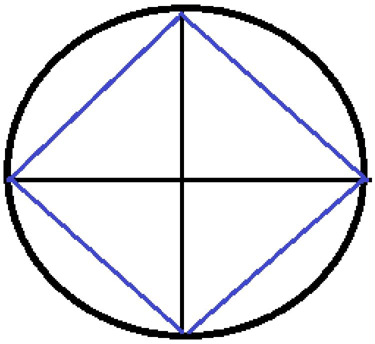
Resolução: Da figura ao lado d é a diagonal da face do cubo e é igal à $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Longrightarrow d = a\sqrt{2}$. Por outro lado, temos que o triângu.o ABC é rectângulo em B, então

$$D^2 = d^2 + a^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2 = 3a^2 \Longrightarrow D = a\sqrt{3}.$$

Logo, a resposta certa é **B**.

51. Numa circunferência de raio R, os seus dois diâmetros perpendiculares entre si, intersectando com a circunferência formam um quadrilátero inscrito, cuja área é igual a:

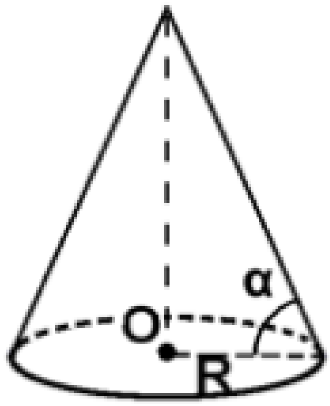
A. R^2 B. $2R^2$ C. $4R^2$ D. $8R^2$ E. $16R^2$



Rsolução: Visto que as diagonais são perpendiculares então o quadrilátero formado é um quadrado cujo lado é dado por $\ell^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 \Longrightarrow \ell = R\sqrt{2}$, então a sua área é igual à $A = \ell^2 = \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$.

A resposta certa é **B**.

52. O raio da base dum cone é igual a R, a geratriz faz um ângulo α com a base. Então o volume V do cone é igual:



A. $V = \dfrac{1}{3}\pi R^3 ctg\alpha$ B. $V = \dfrac{1}{6}\pi R^3$ C. $V = \dfrac{1}{3}\pi R^3 tg\alpha$
D. $V = \pi R^3 \cos\alpha$ E. $V = \pi R^3 sen\alpha$

Resolução: Seja h a altura do cone, então $tg\alpha = \frac{h}{R} \Longrightarrow h = Rtg\alpha$. Deste modo, o volume do cone é dado por $V = \frac{1}{3}A_b \cdot h$ onde A_b denota a área da base do cone. Portanto, $V = \frac{1}{3}A_b \cdot h = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot Rtg\alpha = \frac{1}{3}R^3 tg\alpha$. Então, a resposta certa é **C**.

53. Os pontos da inflexõ do gráfico da função $f(x) = \frac{1}{9}(x^4 - 4x^3)$:

A. $x = 0$ e $x = 2$ B. $x = 1$ e $x = 3$ C. $x = 1$ e $x = 3$ D. $x = 3$ e $x = 4$ E. Não existem

Rsolução: O ponto x_0 é ponto de inflexão se $f''(x_0) = 0$ ou não existe. A função dada tem como domínio toda recta real e $f''(x) = \frac{1}{9}(12x^2 - 24x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \vee x = 2$.

x	$]-\infty, 0[$	0	$]0, 2[$	2	$]2, +\infty[$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\bigcup$	0	$\bigcap$	-16	$\bigcup$

A função tem como pontos de inflexão $x = 0 \wedge x = 2$. Então, a resposta certa é **A**.

54. As assímptotas verticais A_v, horizontais A_H e oblíquas A_0 da função $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ são:

A. $A_v : x = 1$; A_H e A_O não existem
B. $A_v : x = 1$; A_H não existe e $A_O : y = x + 2$

C. $A_v : x = 1$; $A_H\, y = 0$ e A_O não existe
D. $A_v : x = 0$; $A_H\, y = 0$ e A_O não existe
E. Não tem assintotas

Resolução: Para a existência da função dada $(x-1)^2 \neq 0 \Longrightarrow x \neq 0$. Então $x = 1$ é potencial candidadato à A_v. Calculando

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = +\infty,$$

então $x = 1$ é A_v. A função não tem A_H pois

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty \quad \text{e}$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = -\infty.$$

Seja

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = 1$$

então

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + x}{(x-1)^2} = 2.$$

Então $y = x + 2$ é A_O. Deste modo, a resposta certa é **B**.

55. A primitiva $F(x)$ da função $f(x) = sen2x$, sendo C uma constante arbitrária é:

A. $F(x) = \cos 2x + C$ B. $F(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + C$ C. $F(x) = 2sen2x + C$
D. $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$ E. $F(x) = -\frac{1}{2}sen2x + C$

Rsolução: A primitiva $F(x)$ da função $f(x)$ é uma função tal que $F'(x) = f(x)$ e ela pode ser obtiva da seguinte forma

$$F(x) = \int f(x)dx = \int sen2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

A resposta certa é **D**. As funções nas outras alternativas não satisfazem a condição $F'(x) = f(x)$, por exemplo, a função em B, $F(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + C \Longrightarrow F'(x) = -sen2x \neq sen2x$.

Exame de Matemática de 2020A

Correcção do exame de Matemática de 2020A

1. O conjunto das soluções da equação $\sqrt{(1-|1-x|)^2} = 4$ é:

   A: $\emptyset$ B: $\{-4,-2\}$ C: $\{-4,6\}$ D: $\{-2,4\}$ E: $\{-4,-2,4,6\}$

   Resolução:

   Tendo em conta que $\sqrt{x^2} = |x|$, temos:

$$\sqrt{(1-|1-x|)^2} = 4 \Leftrightarrow |1-|1-x|| = 4$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1-|1-x| = 4, \text{ se } 1-|1-x| \geq 0 \\ -1+|1-x| = 4, \text{ se } 1-|1-x| < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1-|1-x| = 4, \text{ se } |1-x| \leq 1 \\ -1+|1-x| = 4, \text{ se } |1-x| > 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1-(1-x) = 4, \text{ se } 1-x \leq 1 \wedge 1-x \geq 0 \\ 1+1-x = 4, \text{ se } -(1-x) \leq 1 \wedge 1-x < 0 \\ -1+1-x = 4, \text{ se } 1-x > 1 \wedge 1-x \geq 0 \\ -1-(1-x) = 4, \text{ se } -(1-x) > 1 \wedge 1-x < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 4, \text{ se } x \geq 0 \wedge x \leq 1 \\ x = -2, \text{ se } x \geq 2 \wedge x > 1 \\ x = -4, \text{ se } x < 0 \wedge x \leq 1 \\ x = 6, \text{ se } x > 2 \wedge x > 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = -4 \\ \vee \\ x = 6. \end{array} \right.$$

   A resposta certa é **C**.

   - Note que pelo menos um elemento de cada conjunto não vazio dado nas restantes alternativas não satisfaz a equação.

2. O conjunto das soluções da inequação $|x^2+x-4| < 2$ é:

   A: $]-3;2[$ B: $]-2;-1[\cup[2;3]$ C: $]-\infty;-3[\cup]-2;-1[\cup]2;\infty[$
   D: $]-3;-2[\cup]1;2[$ E: $]-2;3[$

   Resolução : Temos:

$$|x^2+x-4| < 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2+x-4 < 2 \text{ se } x^2+x-4 \geq 0 \\ -(x^2+x-4) < 2 \text{ se } x^2+x-4 < 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2+x-6 < 0 \text{ se } x^2+x-4 \geq 0 \\ x^2+x-4 > -2 \text{ se } x^2+x-4 < 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x+3)(x-2) < 0 \text{ se } x^2+x-4 \geq 0 \\ x^2+x-2 > 0 \text{ se } x^2+x-4 < 0 \end{array} \right.$$

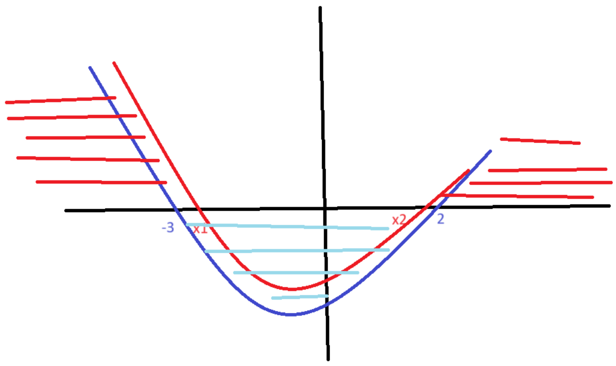
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x+3)(x-2) < 0 \text{ se } (x-x_1)(x-x_2) \geq 0 \\ (x+2)(x-1) > 0 \text{ se } (x-x_1)(x-x_2) < 0, \end{array} \right.$$

   onde

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot(-4)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2},$$

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2},\ x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}.$$

Resolvendo graficamente a inequação $(x+3)(x-2)<0$ sendo que $(x-x_1)(x-x_2)\geq 0$, temos:

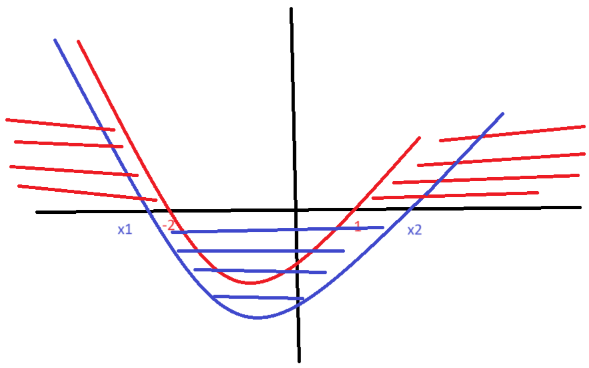


Assim, o conjunto

$$\left(\left]-\infty, \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right[\right) \cap \left]-3;2\right[\tag{1}$$
$$= \left]-3; \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{17}}{2};2\right[\tag{2}$$

é a intersecção dos conjuntos solução de cada inequação.

Resolvendo graficamente a inequação $(x+2)(x-1)>0$ sendo que $(x-x_1)(x-x_2)<0$, temos:



Temos

$$\left(\left]-\infty,-2\right[\cup \left]1,+\infty\right[\right) \cap \left]\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right[= \left]\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, -2\right[\cup \left]1, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right[\tag{3}$$

Unindo os conjuntos (1) e (3), obtemos $]-3;-2[\cup]1,2[$.

A resposta certa é **D**.

- Note que os números $x = 0,\ x = 2,1$ não satisfazem a inequação .

3. O preço de um produto subiu de 20,00 MT para 25,00 MT. Neste caso, o preço subiu em:

   A: 15% B: 20% C: 25% D: 30% E: 10%

   Resolução : Temos:

$$\text{Aumento em } \% = \frac{\text{valor final} - \text{ valor inicial}}{\text{valor inicial}} \cdot 100\% = \frac{25-20}{20} \cdot 100\% = 25\%.$$

   A resposta certa é **C**.

4. Entre os vinte alunos duma turma é preciso escolher dois que vão participar numa Olimpíada em Matemática. De quantas maneiras diferentes é possível fazer esta escolha?

   A. de 190 maneiras B. de 400 maneiras C. de 40 maneiras
   D. de 200 maneiras E. de 380 maneiras

   Resolução : Precisamos formar grupos de pessoas. Desta forma, não há reptição e a ordem não interessa. Logo, o número total de possibilidades é

$$C_{20}^{2} = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{2! \cdot 18!} = 190.$$

   A resposta certa é **A**.

5. Previa-se distribuir 1200 garrafas de refrescos a um certo número de pessoas. Afinal apareceram 4 pessoas a menos e assim cada uma das presentes recebeu mais 10 garrafas. Quantas pessoas eram?

   A: 24 pessoas B: 30 pessoas C: 20 pessoas
   D: 15 pessoas E: 4 pessoas

   Resolução : Seja x o número de pessoas e cada pessoa receberia y garrafas de refrescos. Então,

$$\begin{cases} \frac{1200}{x} = y \\ \\ \frac{1200}{x-4} = y + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 1200 \\ \frac{1200x}{x-4} = xy + 10x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 1200 \\ 1200x = (1200+10x)(x-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 1200 \\ 1200x = 1200x + 10x^2 - 4800 - 40x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 1200 \\ 10x^2 - 40x - 4800 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 1200 \\ x^2 - 4x - 480 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 1200 \\ x^2 - 4x - 480 = 0 \end{cases}$$

   Calculando $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-480) = 1936$, então

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{1936}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 44}{2} \Longrightarrow x = 24 \vee x = -20.$$

   Visto que o número de pessoas nunca é negativo então $x = 24$ pessoas. Então, a resposta certa é **A**.

6. Um teste consiste em quatro perguntas, cada uma das quais contém cinco alternativas de respostas, sendo uma delas é correcta. A condição de aprovação no teste é, no mínimo, quatro respostas correctas. Um aluno, não sabendo a matéria do teste, marcou as respostas aleatoriamente. Qual é a probabilidade do aluno ser aprovado?

A. 1,75% B. 0,16 % C. 6,25 % D. 2,56% E. 0,8%

Resolução : A probabilidade de acertar uma pergunta é

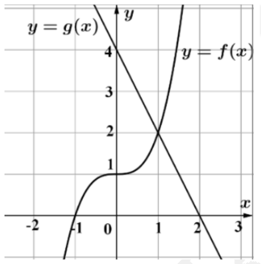
$$P(A) = \frac{\text{número de alternativas certas}}{\text{número de alternativas de resposta}} = \frac{1}{5}.$$

Seja E o evento: "acertar quatro perguntas num total de quatro". Desta forma,

$$P(E) = P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{625}$$

A probalidade em % é $\frac{1}{625} \cdot 100\% = 0,16\%$. A resposta certa é **B**.

Para as perguntas 7,8,9,10,11,12 use a figura:



7. O valor de x para $f(x) = g(x)$ é:

A: -1 B: 4 C: 4 D: 1 E: 0

Resolução : Graficamente $f(x) = g(x)$ é o conjunto dos pontos x tais que $(x, f(x))$ é ponto de intersecção dos gráficos de f e g. Da figura vemos que os gráficos se intersectam em um único pont (1;2). Assim, $f(1) = 2 = g(1)$. Desta forma, $f(x) = g(x)$ quando $x = 1$. A resposta certa é **D**.

8. O limite $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{2}{f(x)}$ é igual a:

A: $-\infty$ B: $+\infty$ C: 0 D: -1 E: -2

Resolução : Da figura temos:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{2}{f(x)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{2}{0^-} = -\infty.$$

A resposta certa é **A**.

9. O valor de x para $f(g(x)) = 1$ é :

A: -1 B: 4 C: 0 D: 1 E: 2

Resolução : Primeiro resolvemos $f(x) = 1$. Do gráfico, $f(x) = 1$ quando $x = 0$. Assim, $f(g(x)) = 1$ quando $g(x) = 0$. No gráfico de g, $g(x) = 0$ quando $x = 2$. A resposta certa é **E**.

10. A área do triângulo formado pela recta definida por $y = g(x)$ e pelos eixos das coordenadas é:

A: $2un^2$ B: $6un^2$ C: $4un^2$ D: $1un^2$ E: $8un^2$

Resolução: O triângulo é recto, tem catetos com medidas $4cm$ e $2cm$. Assim, a área deste triângulo é:

$$\text{Área do triângulo} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{4\,cm \cdot 2\,cm}{2} = 4cm^2$$

A resposta certa é **C**.

11. A expressão analítica da função $y = f(x)$ é:

A: $f(x) = x^3$ B: $f(x) = (x-1)^3$ C: $f(x) = (x+1)^3$ D: $f(x) = x^3 + 1$ E: $f(x) = x^3 - 1$

Resolução: O gráfico de $f(x)$ passa pelos pontos $(-1; 0)$, $(0, 1)$ e (1;2). A função é crescente em todo o seu domínio, tem um ponto de inflexão em (0,1) e não tem extremos. Usando estes dados vamos procurar das opções apresentadas qual das opções apresentadas pode representar o gráfico de f:

- $f(x) = x^3$, não é, pois, $f(0) \neq 1$;
- $f(x) = (x-1)^3$, não é, pois, $f(0) \neq 1$;
- $f(x) = (x+1)^3$, não é, pois, $f(1) \neq 2$;
- $f(x) = x^3 + 1$, sim, pois, $f(0) = 1$, $f(-1) = 0$, $f(1) = 2$, $f'(x) = 3x^2 > 0$ quando $x \neq 0$, logo f é crescente neste conjunto; e $x = 0$ é ponto e inflexão, o seja, $f''(0) = 0$ e a função $f''(x)$ muda de sinal ao passar pelo ponto de abcissa $x = 0$.
- $f(x) = x^3 - 1$, não é, pois, $f(0) \neq 1$.

A resposta certa é **D**.

12. O coeficiente angular da recta $y = g(x)$ é:

A: 2 B: 4 C: -2 D: -4 E: 1

Resolução : Tendo em conta que o coeficiente angular da recta é o declive da mesma e que esta recta passa pelos pontos (0,4) e (2,0), temos :

$$\tan\varphi = a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-4}{2-0} = -2.$$

A resposta certa é **C**.

13. Dada a função $f(x) = \frac{x-3}{9-x^2}$. O ponto de abcissa $x = 3$...

A. é ponto de descontinuidade não eliminável de 1a espécie

B. não é ponto de descontinuidade

C. é ponto de descontinuidade não eliminável de 2a espécie

D. é ponto de descontinuidade eliminável

E. nenhuma das alternativas anteriores.

Resolução : A condição de continuidade de uma função num ponto $x = x_0$ é:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Temos: $f(3)$ não existe, pois não existe divisão por zero. Mais,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^-} f(x) &= \lim_{x\to 3^-} \frac{x-3}{9-x^2} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x-3}{(3-x)(3+x)}\\ &= \lim_{x\to 3^-} \frac{x-3}{-(x-3)(x+3)} = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{9-x^2} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{(3-x)(3+x)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{-(x-3)(x+3)} = -\frac{1}{6}.$$

Assim,

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = -\frac{1}{6},\ f(3) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x).$$

A função tem descontinuidade no ponto $x = 3$, da primeira espécie e eliminável. A resposta certa é **D**.

14. Qual é o cento e vigésimo primeiro membro da sucessão $5, 2, -1, -4, -7, \ldots$?

A: -55 B: -21175 C: -4342 D: -21178 E: -358

Resolução : Temos: $a_{n+1} - a_n = -3,\ n = 1, 2, \ldots$. Assim, a_n é uma progressão aritmética de razão $d = -3,\ a_1 = 5$. O termo geral tem a forma
$a_n = a_1 + d(n-1)$. O vigésimo primeiro termo é:

$$a_{21} = a_1 + 20d = 5 + 20 \cdot (-3) = -55.$$

A resposta certa é **A**.

15. A partir do ano 2000, o preço de um produto aumenta anualmente em 11%. Denotemos por a_n preço do produto no ano 2000$+n$. A sucessão a_1, a_2, a_3,... é:

A. uma progressão aritmética com razão 11

B. uma progressão aritmética com razão 0,11

C. uma progressão geométrica com razão 11

D. uma progressão geométrica com razão 1,11

E. uma sucessão que não é progressão aritmética nem progressão geométrica

Resolução : O preço do produto no ano 2001 é $a_1 = a_0 + 11\% a_0 = a_0 + 0,11a_0 = 1,11a_0$, $a_2 = a_1 + 11\% a_1 = a_1 + 0,11a_1 = 1,11a_1 = 1,11(1,11)a_0 = (1,11)^2 a_0$, $a_n = (1,11)^n a_0$. Assim,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1,11)^{n+1}a_0}{(1,11)^n \cdot a_0} = 1,11.$$

Assim, a_n é uma progressão geométrica com razão 1,11.

A resposta certa é **D**.

16. PASSE PARA A PERGUNTA SEGUINTE.

17. Qual é o valor do parâmetro real h para o qual a função $f(x) = \begin{cases} 3x + h, & \text{se } x > 2 \\ x^2, & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$ seja contínua no ponto $x = 2$?

A: -2 B: 1 C: 0 D: -1 E: 2

Resolução : A condição de continuidade de uma função num ponto $x = x_0$ é:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

As funções $3x + h$ e x^2 são contínuas nos conjuntos de definição , pois são polinômios. O ponto que suscita dúvida quanto à continuidade de $f(x)$ é o ponto de abcissa $x = 2$. Verifiquemos a condição de condinuidade neste ponto. Temos:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$$
$$4 = 6 + h = 4 \Rightarrow h = -2.$$

A resposta certa é **A**.

18. A derivada da função $f(x) = \ln(1 - \cos(x))$ é:

A: $\cot \frac{x}{2}$ B: $\frac{\sin(x)}{1-\cos^2 x}$ C: $-\frac{\sin(x)}{1-\cos^2 x}$ D: 0 E: $\frac{\sin(x)}{1-\cos x}$

Resolução : Usando as regras

$$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}, \ (\cos x)' = -\sin(x),$$

temos:

$$f'(x) = (\ln(1 - \cos(x)))' = \frac{(1 - \cos(x))'}{1 - \cos(x)} = \frac{\sin(x)}{1 - \cos x}.$$

A resposta certa é **E**.

19. Os pontos de máximo da função $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ são:

A: só $x = -1$ B: $x = 0$ e $x = 1$ C: só $x = -1$ D: não existem E: só $x = 1$

Resolução : Derivando a função $f(x)$ temos:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 - 12x^2 = 0$$
$$\Rightarrow 12x^2(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1.$$

Vamos estudar o sinal da derivada, temos:

x	$]-\infty, 0[$	0	$]0, 1[$	1	$]1, \infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

A função $f'(x)$ muda de sinal negativo para positivo ao passar pelo ponto de abcissa $x = 1$, então f atinge um mínimo quando $x = 1$ e não tem máximo. A resposta certa é **D**.

20. A solução da integral $\int \frac{3x+1}{x} dx$ é:

A: $x^2 + 3x + c$ B: $3x + \ln|x| + c$ C: $3x^2 + \ln|x| + c$
D: $\frac{3x^2+x}{x^2} + c$ E: Nenhuma de A-D

Resolução : Usando as propriedades

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx, \ \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \ n \neq -1$$
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c,$$

temos:

$$\int \frac{3x + 1}{x} dx = \int \left(\frac{3x}{x} + \frac{1}{x}\right) dx = \int \left(3 + \frac{1}{x}\right) dx = 3x + \ln|x| + c,$$

onde c é constante arbitrária. A resposta certa é **B**.

- Note a derivada de $\frac{3x+1}{x}$ não coincide com nenhuma das funções dadas nas restantes alternativas.

21. A parte real do número complexo $z = i \cdot (3-4i)$ é igual a:
A: -4 B: -3 C: 3 D: 4 E: 5

Resolução : Um número complexo z admite a representação $z = a+ib$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, são a perte real e imaginária de z, respectivamente, $i = \sqrt{-1}$. Assim,

$$z = i \cdot (3-4i) = 3i - 4i^2 = 3i + 4 = 4 + 3i.$$

A parte real é 4. A resposta certa é **D**.

22. PASSE PARA A PERGUNTA SEGUINTE.

23. Entre as cinco proposições apresentadas, a proposição falsa é:
A: $\forall x \in \mathbb{R}: \ x^2 > -4$ B: $\exists x \in \mathbb{R}: \cos x = 2$ C: $\forall x \in \mathbb{R}: \ -|x| \leq 0$
D: $\exists x \in \mathbb{R}: |x| = \pi$ E: $\forall x \in \mathbb{R}: \ e^x > 0$

Resolução : Temos:

- $\forall x \in \mathbb{R}: \ x^2 > -4$, é verdadeira, pois o quadrado de um número real é sempre não negativo.
- $\exists x \in \mathbb{R}: \cos x = 2$, é falso, pois a imagem da função $\cos(x)$ é $[-1;1]$. Assim, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = 2$.
- $\forall x \in \mathbb{R}: \ -|x| \leq 0$ é verdadeira, pois o módulo de um número real é sempre não negativo ($|x| \geq 0$). Multiplicando por -1 obtemos a inequação dada que é válida para quer x em $\mathbb{R}$. $\exists x \in \mathbb{R}: |x| = \pi$, é verdade, pois, por exemplo $x = \pi$ satisfaz a equação .
- $\forall x \in \mathbb{R}: \ e^x > 0$ é verdade, pois, a função exponencial é sempre positiva em $\mathbb{R}$.

A resposta certa é **B**.

24. O domínio de definição da função $f(x) = \sqrt{5-x} \cdot \log_3^{(x-3)}$ é:
A: $\emptyset$ B: $[5, \infty[$ C: $[-\infty, 3[$ D: $]3, 5]$ E: $]-\infty, 3[\cup]5, \infty[$

Resolução : Tendo em conta o domínio de $\sqrt{\cdot}$ e de logarítmo, temos:

$$\begin{aligned} &5 - x \geq 0 \wedge x - 3 > 0 \Rightarrow -x \geq -5 \wedge x > 3 \\ &\Rightarrow x \leq 5 \wedge x > 3 \Rightarrow 3 < x \leq 5 \Rightarrow x \in]3, 5]. \end{aligned}$$

A resposta certa é **D**.

- Note que $x = 0$ e $x = 6$ não pertencem ao domínio de existência de $f(x)$, pois $\log_3^{(0-3)}$ não existe em $\mathbb{R}$ e $\sqrt{5-6}$ não existe em $\mathbb{R}$.

25. Qual é a expressão equivalente à expressão $(1-a^2)(a^{1/2}+1)^{-1}(a+1)^{-1} + a^{1/2} + a$, se $a > 0$?
A. $a+1$ B. $(1-\sqrt{a})^2$ C. 1 D. $(1+\sqrt{a})^2$ E. $a-1$

Resolução : Se $a \neq 1$, temos:

$$\begin{aligned} (1-a^2)(a^{1/2}+1)^{-1}(a+1)^{-1} + a^{1/2} + a &\Leftrightarrow \frac{1-a^2}{\sqrt{a}+1} \cdot \frac{1}{a+1} + \sqrt{a} + a \\ &\Leftrightarrow \frac{(1-a^2)(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{1}{a+1} + \sqrt{a} + a \\ \Leftrightarrow \frac{(1-a^2)(\sqrt{a}-1)}{(a-1)} \cdot \frac{1}{a+1} + \sqrt{a} + a \ &\Leftrightarrow \frac{(1-a^2)(\sqrt{a}-1)}{a^2-1} + \sqrt{a} + a \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{a}+1+\sqrt{a}+a=a+1.$$

Se $a=1$, teremos $1-a^2=0$, logo, $(1-a^2)(a^{1/2}+1)^{-1}(a+1)^{-1}+a^{1/2}+a=0+1+1=2=a+1$. A resposta certa é **A**.

26. Se $\frac{y}{x}=\frac{3}{2}$, então o valor da fração $\frac{6x-3y}{3x+2y}$ é igual a:

A. 4 B. 1 C. 0, 25 D. 3 E. 0

Resolução : Temos:

$$\frac{y}{x}=\frac{3}{2}\Rightarrow 2y=3x\Rightarrow \frac{6x-3y}{3x+2y}=\frac{2\cdot 3x-3y}{3x+2y}=\frac{4y-2y}{2y+2y}=\frac{y}{4y}=0,25.$$

A resposta certa é **C**.

- Note que fazendo $x=2$ e $y=3$, obtemos $\frac{y}{x}=\frac{3}{2}$ e $\frac{6x-3y}{3x+2y}=\frac{1}{4}$.

27. A população P de uma cidade aumenta de acordo com a função $P(t)=4^{0,05t+9}$, onde t é o tempo medido em anos. Depois de quantos anos a população da cidade dobrará?

A. 4 anos B. 10 anos C. 8 anos D. 16 anos E. 9 anos

Resolução : No instante inicial, $t=0$ e $P_0=4^9$. Qunado $P=2P_0$, teremos:

$$\frac{P_0}{2P_0}=\frac{4^9}{4^{0,05t+9}}\Rightarrow \frac{1}{2}=4^{-0,05t}$$
$$\Rightarrow 2^{-1}=2^{-0,1t}\Rightarrow 1=-0,1t\Rightarrow t=10.$$

A resposta certa é **B**.

28. PASSE PARA A PERGUNTA SEGUINTE.

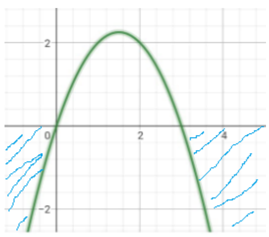
29. O conjunto de soluções da inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-x^2}>1$ é:

A. $]-\infty,0]$ B. $]-\infty,0[\cup]3,\infty[$ C. $]0,3[$ D. $]-\infty,-3[\cup]0,\infty[$ E. $]-3,\infty[$

Resolução : Temos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-x^2}>1\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-x^2}>\left(\frac{1}{2}\right)^0$$
$$3x-x^2<0\Leftrightarrow x(3-x)<0.$$

Resolvendo graficamente, teremos:



A solução é $]-\infty,0[\cup]3,\infty[$. A resposta certa é B.

30. A única raíz da equação $100^x = 3 \cdot 10^x + 10$ é igual a:

A. $-\log_{10}^{2}$ B. $\log_{10}^{2}$ C. 10 D. $\log_{10}^{5}$ E. $-\log_{10}^{5}$

Resolução : Temos:

$$100^x = 3 \cdot 10^x + 10 \Leftrightarrow 10^{2x} = 3 \cdot 10^x + 10.$$

Fazemos a substituição $t = 10^x > 0$. Teremos:

$$\begin{gathered}10^{2x} = 3 \cdot 10^x + 10 \Leftrightarrow t^2 = 3 \cdot t + 10 \\ \Leftrightarrow t^2 - 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow (t-5)(t+2) = 0 \\ t = 5 \vee t = -2.\end{gathered}$$

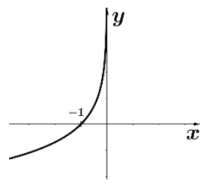
Visto que $t > 0$, teremos $t = 5$. Assim,

$$5 = 10^x \Rightarrow x = \log_{10}^{5}.$$

A resposta certa é **D**.

- As restantes alternativas não satisfazem a equação .

31. Qual é a função cujo gráfico está apresentado na figura?



A: $y = \ln(-x)$ B: $y = -e^x$ C: $y = -\ln(-x)$
D: $y = e^{-x}$ E: $y = -\ln x$

Resolução: A função satisfaz as seguntes condições : $f(-1) = 0$, $f(x) \to -\infty$ quando $x \to -\infty$ e $f(x) \to +\infty$ quando $x \to 0^-$ e a única expressão com essas características é $y = -\ln(-x)$. Logo, a resposta certa é **C**.

32. O número real $\log_{0.125} 5 \cdot \log_{125} 2$ é igual a:

A: $1/9$ B: 9 C: $\log_2 5$ D: -9 E: $-1/9$

Resolução: Temos:

$$\log_{0.125} 5 \cdot \log_{125} 2 = \log_{1/8} 5 \cdot \log_{125} 2 = \log_{2^{-3}} 5 \cdot \log_{5^3} 2 = -\frac{1}{9}\frac{\log_5 5}{\log_5 2} \cdot \log_5 2 = -\frac{1}{9}.$$

A resposta certa é **E**.

33. A solução da equação logarítmica $\log_3 x + \dfrac{1}{(\log_3 x) - 3} = 5$ é:

A: $x = 27$ B: $x = 243$ C: $x = 9$ D: $x = 81$ E: $x = 729$

Solução: Para a existência da expressão $x > 0 \wedge \log_3 x - 3 \neq 0 \Longrightarrow x > 0 \wedge \log_3 x \neq \log_3 3^3 \Longrightarrow x > 0 \wedge x \neq 27$. Resolvendo a equação dada e fazendo a substituição $\log_3 x = z$, teremos:

$$\begin{aligned}&\log_3 x + \frac{1}{(\log_3 x) - 3} = 5 \Longrightarrow z + \frac{1}{z-3} = 5 \Longrightarrow z(z-3) + 1 = 5(z-3) \\ &\Longrightarrow z^2 - 8z + 16 = 0 \Longrightarrow (z-4)^2 = 0 \Longrightarrow z = 4 \Longrightarrow \log_3 x = 4 \Longrightarrow \\ &\log_3 x = 4\log_3 3 \Longrightarrow x = 3^4 = 81.\end{aligned}$$

A resposta certa é **D**.

34. O conjunto de soluções da inequação $\log_{0,5}(-x)+\log_{0,5}(-1-x)<-1$ é:

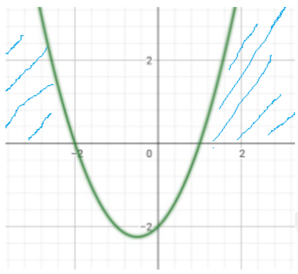
A: $\emptyset$ B: $]-\infty;-2[$ C: $]-2;1[$ D: $]-\infty;-1[$ E: $]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

Solução: Para a existência da expressão dada $(-x>0 \wedge -1-x>0) \Longrightarrow x<-1$. Resolvendo a inequação temos:

$$\log_{0,5}(-x)+\log_{0,5}(-1-x)<-1 \Longrightarrow \log_{0,5}[-x(-1-x)]<\log_{0,5}0,5^{-1}$$

$$x(1+x)>\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Longrightarrow x(1+x)>2 \Longrightarrow x^2+x-2>0 \Longrightarrow (x-1)(x+2)>0$$

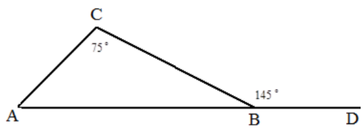
Resolvendo graficamente, temos:



Assim, a solução da inequação quadratica será $x\in]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[$. Intersectando com o domínio da expressão temos $x\in]-\infty,-2[$. Logo, a resposta certa é **B**.

35. A figura ao lado mostra um triângulo ABC com segmento AB prolongado até o ponto D, o ângulo externo CBD medindo 145^o e o ângulo C medindo 75^o. A medida do ângulo CAB é:

A: 35^o B: 70^o C: 110^o D: 220^o E: Nenhuma das alternativas anteriores



Resolução: É sabido que $A\hat{B}C+C\hat{B}D=180^o \Longrightarrow A\hat{B}C=180^o-145^o=35^o$ e por outro lado, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o. Então, $C\hat{A}B+75^o+A\hat{B}C=180^o \Longrightarrow C\hat{A}B=180^o-110^o=70^o$. Assim, a resposta certa é **B**.

36. Qual é o raio do círculo cuja área mede metade da área do círculo limitado pela circunferência dada pela equação $(x-2)^2+(x+2)^2=4$?

A: $0.5\,un$ B: $1\,un$ C: $\sqrt{2}\,un$ D: $2\,un$ E: $2\sqrt{2}\,un$

Resolução: A equação da circunferência de raio R e centro em (x_0,y_0) é dada por $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. A circunferência dada tem como raio $R_0=2$, então a sua área será $A=\pi R_0^2=4\pi$, assim a área do círculo menor será $A_1=\frac{A_0}{2}=2\pi$. Então o raio do círculo menor é $R_1=\sqrt{2}$.

A resposta certa é **C**.

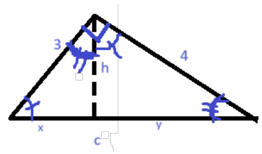
37. Determine o valor do parêmetro h para o qual as rectas no plano dadas pelas equações $x+hy-5h=0$ e $4x-3y-9=0$ bsejam paralelas.

A: $-3/4$ B: $4/3$ C: tal h não existe D: $-4/3$ E: $3/4$

Resolução: Para que duas rectas sejam paralelas é suficiente que tenham o mesmo declive. A recta $4x-3y-9=0$ pode ser escrita na forma $y=\frac{4}{3}x-3$ e a recta $x+hy-5h=0$ pode ser escrita na forma $y=-\frac{x}{h}+5$. Então, para que elas sejam paralela $-\dfrac{1}{h}=\dfrac{4}{3} \Longrightarrow h=-\dfrac{3}{4}$.

Logo, a resposta certa é **A**.

38. Determine a altura dum triângulo rectângulo traçada do vértice do ângulo recto se os catetos do triângulo medem 3 cm e 4 cm.



A: $6\,cm$ B: $\sqrt{7}cm$ C: $2,5cm$ D: $8/3cm$ E: $2,4cm$

Da figura ao lado, vemos que a altura h divide o triângulo em dois triângulos rectângulos semelhantes. Temos primeiro que $c^2 = 3^2 + 4^3 \Longrightarrow c = 5$. Pela semelhança de triângulos temos, $\frac{4}{3} = \frac{y}{h}$ e $\frac{y}{h} = \frac{h}{x}$ então $y = \frac{4}{3}h$ $h^2 = xy \Longrightarrow x = \frac{3}{4}h$.

$c = x + y = 5 \Longrightarrow \dfrac{4}{3}h + \dfrac{3}{4}h = 5 \Longrightarrow 5h = 12 \Longrightarrow h = \dfrac{12}{5} = 2,4$. Então, a resposta certa é **E**.

39. Todos os valores de m, tais que $2\cos x = m+1$, para algum valor de x definem-se pela condição :

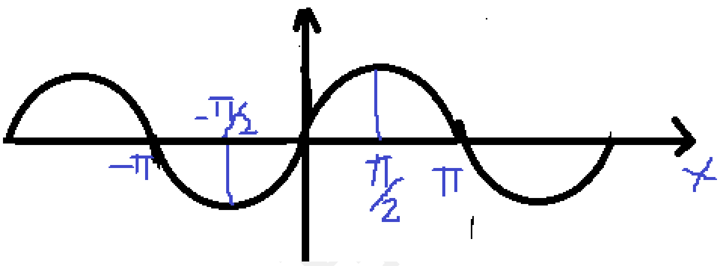
A: $-3 \leq m \leq 1$ B: $-1 \leq m \leq 1$ C: $m \geq -1$ D: $-1 \leq m \leq 3$ E: $m \geq -3$

Resolução: $2\cos x = m+1 \Longrightarrow \cos x = \frac{m+1}{2}$. Sabe-se que $-1 \leq \cos x \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq \frac{m+1}{2} \leq 1 \Longrightarrow -2 \leq m+1 \leq 2 \Longrightarrow -3 \leq m \leq 1$. Logo, a resposta certa é **A**.

40. A função $y = senx - 1$ é monótona crescente no intervalo:

A: $[-\frac{3\pi}{2}; 0]$ B: $[0; \pi]$ C: $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ D: $[-\pi, 0]$ E: Em nenhum dos intervalos

Resolução:



A figura acima representa a função $y = senx$ e é monótona crescente no intevalo $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Visto que a função $y = senx - 1$ é deslocação da função $y = senx$, ao longo do eixo Oy uma unidade para baixo, o intervalo de monotonia não se altera. Portanto, a resposta certa é **C**.

41. Qual é o conjunto das soluções da equação $\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = \cos^2(\pi + x)$.

A: $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$ B: $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$ C: $\left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$ D: $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right\}$ E: $\left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right\}$

Resolução: Temos:

$$\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos^2(\pi + x) \Longrightarrow$$
$$\left(\cos\frac{3\pi}{2}\cos x - sen\frac{3\pi}{2}senx\right)^2 = (\cos\pi\cos x - sen\pi senx)^2 \Longrightarrow$$
$$sen^2x = \cos^2 x \Longrightarrow tg^2x = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

A resposta certa é **B**.

42. Qual é a função ímpar que tem o período mínimo positivo $T = 4$?

A: $y = \cos\dfrac{\pi x}{4} + 2$ B: $y = sen\dfrac{\pi x}{2} - 3$ C: $y = tg\dfrac{\pi x}{2} - 1$ D: $y = \cos\dfrac{\pi x}{2} + 3$ E. $y = sen\dfrac{\pi x}{4} - 2$

Resolução: A função $\cos x$ é par, portanto ficam de fora as opções A e D, as restantes funções são ímpares. O período da função tgx é π, então $\frac{\pi T}{2} = \pi \Longrightarrow T = 2 \neq 4$, então C também não é correcta. O período da função $senx$ é 2π, então para alternativa B temos $\frac{\pi T}{2} = 2\pi \Longrightarrow T = 4$. Esta alternativa está certa. Para a alternativa E temos $\frac{\pi T}{4} = 2\pi \Longrightarrow T = 8 \neq 4$. Logo, a resposta certa é **B**.

43. A produção P das camisas numa fábrica (em milhares de unidades por ano) depende do número de máquinas x de um determinado tipo (em unidades) de acordo com a função $P(x) = 2x^2 + x$. Que número mínimo de máquinas fornece a produção não inferior a 45 mil camisas por ano?

A: 3 máquinas B: 4 máquinas C: 5 máquinas D: 6 máquinas E: 7 máquinas

Resolução : O número mínimo de máquinas fornece a produção não inferior a 45 mil camisas corresponde a solução da inequação $P(x) \geq 45 \Longrightarrow 2x^2 + x \geq 45 \Longrightarrow 2x^2 + x - 45 \geq 0 \Longrightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-45) = 361 \Longrightarrow x_1 = \frac{-1-19}{2 \cdot 2} = -5 \vee x = \frac{-1+19}{2 \cdot 2} = 4,5$. Então, $2x^2 + x - 45 \geq 0 \Longrightarrow (x+5)(x-9,5) \geq 0 \Longrightarrow x \in]-\infty; -5] \cup [4,5; +\infty]$. Visto que o número de máquinas não pode ser um negativo, então a solução da inequação é $x \in [4,5; +\infty]$. Logo, número mínimo de máquinas fornece a produção não inferior a 45 mil é 5 máquinas. A resposta certa é **C**.

44. Qual é o conjunto de soluções da inequação $2x < x^2 - 3 < -2x$?

A: $]-3; -1[\cup]1; 3[$ B: $]-1; 3[$ C: $]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$ D: $]-3; -1[$ E: $-\infty; -1[\cup]1; 3[$

Resolução : As inequações acima podem ser escritas da seguinte forma:

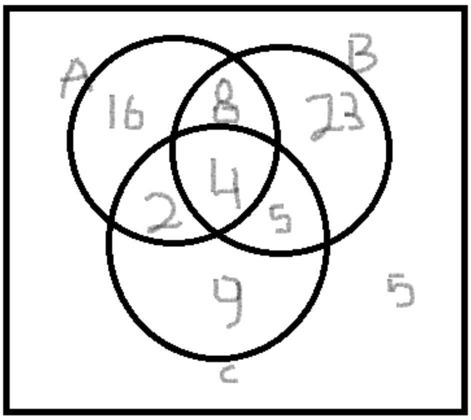
$$\begin{cases} x^2 - 3 < -2x \\ x^2 - 3 > 2x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+3) < 0 \\ (x+1)(x-3) > 0 \end{cases}$$

Os gráficos abaixo correspondem a primeira e segunda inequações, respectivamente, cujas soluções são os intervalos indicados à tracejado. A solução do sistema é a intersecção das soluções parciais, i.e., $x \in]-3; 1[\cap(]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[) =]-3; -1[$. Então, a resposta certa é **D**.

45. Num prédio foi efectuada uma pesquisa sobre os frequentadores das lanchonetes A, B e C e constatou-se que 30, 40 e 20 indivíduos frequentavam A, B e C, respectivamente; 12 frequentavam A e B; 9 frequentavam B e C; 6 frequentavam A e C; 4 frequentavam A, B e C; 5 não frequentavam nenhuma lanchonete. O número de moradores do prédio é:

A: 90 B: 80 C: 72 D: 92 E: 62

Resolução : Sejam A, B e C os conjuntos de moradores que frequentam lanchonete A, B e C, reespectivamete. Usando peoperações de conjuntos, temos: $|A| = 30$, $|B| = 40$, $|C| = 20$, $|A \cap B| = 12$, $|A \cap C| = 6$, $|B \cap C| = 9$ e $|(A \cup B \cup C)^c| = 5$. $|(A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)| = 12 - 4 = 8$, $|(B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)| = 9 - 4 = 5$, $|(A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)| = 6 - 4 = 2$. Assim $|A \setminus (B \cup C)| = 30 - 8 - 2 - 4 = 16$, $|B \setminus (A \cup C)| = 40 - 8 - 5 - 4 = 23$ e $|C \setminus (B \cup A)| = 20 - 2 - 5 - 4 = 9$. Usando o diagrama de Venn, temos:



Com base nesse diagrama temo que o número total de moradores é $16+8+23+5+9+2+4+5=72$. Desta forma, a resposta certa é alternativa **C**.

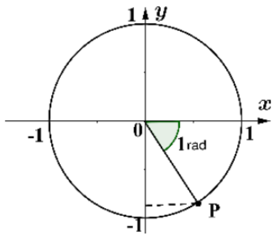
46. Seja $X=\{1;7\}$ e $Y=\{3;9\}$. O conjunto $\mathbb{Z}\cap((X\cup Y)\setminus(X\cap Y))$ é:

A: $\{2;3;7;8\}$ **B**: $\{1;3;7;9\}$ C: $\{3;4;5;6\}$ D: $\{1;2;3;7;8;9\}$ E: $\{1;2;8;9\}$

Reolução : Temos: $X\cup Y=\{1;3;7;9\}$ $X\cap Y=\emptyset \Longrightarrow (X\cup Y)\setminus(X\cap Y)=X\cup Y=\{1;3;7;9\}$. Então, $\mathbb{Z}\cap((X\cup Y)\setminus(X\cap Y))=\mathbb{Z}\cap\{1;3;7;9\}=\{1;3;7;9\}$.

Logo, a resposta certa é **B**.

47. Qual é a ordenada do ponto P na figura?



A: $\cos 1$ **B**: $sen1$ C: $-tg1$ D: $-sen1$ E: $-\cos 1$

Resolução: Ordenada de um ponto corresponde ao valor de y e no círculo trigonométrico, y representa a função seno e x a função cosseno. Então , $y=sen(-1)=-sen1$. Logo, a resposta certa é **D**.

48. Simplificando a expressão $\dfrac{sen\,\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{sen\,\alpha}$ obtém-se:

A: $\dfrac{2}{sen\alpha}$ B: $\dfrac{sen\alpha}{2}$ C: $\dfrac{\cos^2\alpha}{2}$ D: $\dfrac{2}{\cos\alpha}$ E: 2

Resolução: Vamos simplificar a expressão:

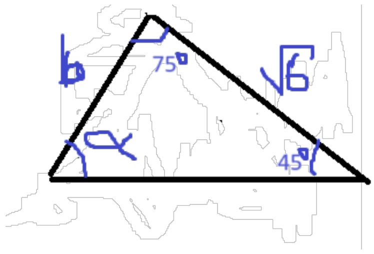
$$\begin{aligned}\frac{sen\,\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{sen\,\alpha} &= \frac{sen^2\alpha+(1+\cos\alpha)^2}{sen\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{sen^2\alpha+\cos^2\alpha+2\cos\alpha+1}{sen\alpha(1+\cos\alpha)}\\ &= \frac{1+2\cos\alpha+1}{sen\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{2+2\cos\alpha}{sen\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{2(1+\cos\alpha)}{sen\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{2}{sen\alpha}.\end{aligned}$$

A resposta certa é **A**.

49. Um dos lados dum triângulo mede $\sqrt{6}$ cm, e os dois ângulos adjacentes a este lado medem 45^o e 75^o. Qual é a medida do menor lado do triângulo?:

A: $2\sqrt{3}\,cm$ B: $2(\sqrt{3}-1)\,cm$ C: $2\,cm$ D: $6(\sqrt{3}+1)\,cm$ E: $3-\sqrt{3}\,cm$

Resolução: A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180^o, então $75^o + 45^o + \alpha = 180^o \Longrightarrow \alpha = 60^o$. Usando o teorema dos senos para o triângulo ao lado, temos
$\dfrac{\sqrt{6}}{sen60^o} = \dfrac{b}{sen45^o} \Longrightarrow \dfrac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Longrightarrow b = 2\,cm.$



A resposta certa é **C**.

50. Determine $sen(x)$ sabendo que $tg(x) = -0,75$ e $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

A: -0.8 B: -0.6 C: ± 0.5 D: 0.6 E: 0.8

Resolução: Sendo $tgx = -0.75 = -\frac{3}{4} \Longrightarrow senx = -\frac{3}{4}\cos x$ e por outro lado, temos a fórmula fundamental da trigomometria $sen^2x + \cos^2 x = 1 \Longrightarrow \left(-\frac{3}{4}\cos x\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Longrightarrow \frac{25}{16}\cos^2 x = 1 \Longrightarrow \cos x = \pm\frac{4}{5}$. Assim, quand $\cos x = \frac{4}{5}$, temos $senx = -\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{3}{5} = -0.6$ e para $\cos x = -\frac{4}{5}$, temos $senx = -\frac{3}{4}\cdot(-\frac{4}{5}) = \frac{3}{5} = 0.6$. As funções seno e cosseno tem sinais contrários nom segundo e quarto quadrantes, mas segundo quadrante não faz parte do domínio de x, logo $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ e $senx = -0.6$. Então, a resposta certa é **B**.

51. A velocidade do carro em uma determinada secção do caminho foi aumentada de $100km/h$ para $125km/h$. O tempo gasto nesta secção diminuiu em relação ao anterior em:

A. 20% B. 25% C. 30% D. 100/3% E. 35%

Resolução: Supomos que o espaço percorrido inicialmente é S em t_1 horas(h) a uma velocidade constante de $100\,km/h$. Depois de aumentar a velocidade, o veículo percorre o mesmo espaço S em t_2 horas (h) a uma velocidade constante de $125\,km/h$. Temos:

$$t_1 = \frac{\Delta S}{v_1} = \frac{S}{100}h, \quad t_2 = \frac{\Delta S}{v_2} = \frac{S}{125}h.$$

Assim, a variação do tempo em percentagem é:

$$\frac{t_2 - t_1}{t_1}\cdot 100\% = \frac{S/125 - S/100}{S/100}\cdot 100\% = -\frac{25}{125}\cdot 100\% = -20\%.$$

A resposta certa é **A**.

52. O valor $\sqrt{2^3} + \sqrt{32}$ é igual a:

A. $\sqrt{40}$ B. $2\sqrt{20}$ C. $6\sqrt{2}$ D. $5\sqrt{8}$ E. $2^{3/2} + 5\cdot 2^{1/2}$

Resolução: Temos:

$$\sqrt{2^3} + \sqrt{32} = \sqrt{2^3} + \sqrt{2^5} = 2^{3/2} + 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 4\cdot\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

A resposta certa é **C**.

53. Simplificando a expressão $2\sqrt{12}-2\sqrt{8}+\dfrac{12}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$ obtemos:

A. $2\sqrt{2}$ B. $8\sqrt{3}-10\sqrt{2}$ C. $\sqrt{12}$ D. $\sqrt{27}$ E. $2\sqrt{3}$

Resolução: Temos:

$$\begin{aligned}
2\sqrt{12}-2\sqrt{8}+\frac{12}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} &= 2\sqrt{4\cdot 3}-2\sqrt{4\cdot 2}+\frac{12(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}\\
&= 4\sqrt{3}-4\sqrt{2}+\frac{12(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{4\cdot 3-9\cdot 2}\\
&= 4\sqrt{3}-4\sqrt{2}-4\sqrt{3}+6\sqrt{2}=2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Logo, a resposta certa é alternativa **A**.

54. A solução da inequação linear $3\sqrt{11}(6-3x)>10(6-3x)$ é:

A: $]0,5;+\infty[$ B: $]-\infty;0,5[$ C: $]-\infty;2[$ D: $]2;+\infty[$ E: $\emptyset$

Resolução: Se $6-3x\neq 0 \Longrightarrow 3\sqrt{11}>10$ que é falso. Se $6-3x=0\Longrightarrow 0>0$ o que também é falso. Então, não existe x que satisfaça a equação dada. Assim, a resposta certa é **E**.

55. O resultado da decomposição do polinómio $P(x)=2x^5(x-1)^2+x^3(x-1)^3$ em factores é:

A. $x^3(x-1)^2(2x+1)(2x-1)$
B. $x^3(x-1)^2(x+1)(2x-1)$
C. $x^5(x-1)^4(2x+1)$
D. $x^{5/3}(x-1)^{3/2}(x+1)(2x-1)$
E. $x^3(x-1)^3(2x+1)$

Resolução:

$$\begin{aligned}
P(x)&=2x^5(x-1)^2+x^3(x-1)^3=x^3(x-1)^2(2x^2+x-1)\\
&=x^3(x-1)^2(2(x-\frac{1}{2})(x+1))=x^3(x-1)^2(2x-1)(x+1)
\end{aligned}$$

Logo, a resposta certa é **B**.

56. O resultado da divisão do polinómio $P_1(x)=x^6-2x^4+x^2$ por polinómio $P_2(x)=(x^2+x)^2$ é o polinómio:

A. x^2 B. x^2+1 C. $(x-1)^2$ D. x^2-1 E. $(x+1)^2$

Resolução: $P_1(x)=x^6-2x^4+x^2=x^2(x^4-2x^2+1)=x^2(x^2-1)^2=x^2(x+1)^2(x-1)^2$ e $P_2(x)=(x^2+x)^2=x^2(x+1)^2$, então $P_1(x)=P_2(x)(x-1)^2\Longrightarrow \frac{P_1(x)}{p_2(x)}=(x-1)^2$. Deste modo, a resposta certa é **C**.

57. Determine o conjunto dos valores do parâmetro a para os quais a equação $x^2+ax+1=0$ não tenha raizes reais:

A: $]-2;2[$ B: $]-\infty;2[$ C: $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ D: $]-2;+\infty[$ E: $\emptyset$

Resolução: Para que a equação não tenha raizes reais basta $\Delta=a^2-4<0\Longrightarrow(a-2)(a+2)<0\Longrightarrow a>-2\wedge a<2$, i.e., $-2<a<2$. Logo, a resposta certa é **A**.

58. Sejam t e s raízes diferentes da equação quadrática $x^2+2x-\dfrac{1}{239}=0$. Então $t^{-1}+s^{-1}$ é igual a:

A: $2/239$ B: -478 C: $\sqrt{240/239}$ D: 478 E: $2/239$

Resolução: Resolvendo a equação dada temos:

$\Delta = 2^2-4\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{239}\right)=\frac{960}{239}$. Sejam $t=x_1$ e $s=t_2$, então

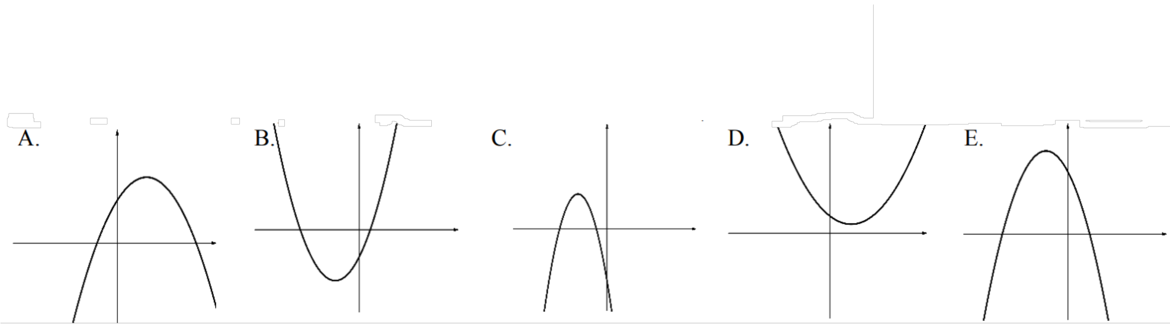
$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{\frac{960}{239}}}{2}=-1\pm\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{960}{239}}=-1\pm\sqrt{\frac{240}{239}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
t^{-1}+s^{-1} &= \frac{1}{-1+\sqrt{\frac{240}{239}}}+\frac{1}{-1-\sqrt{\frac{240}{239}}}=\frac{1}{\frac{-\sqrt{239}+\sqrt{240}}{\sqrt{239}}}-\frac{1}{\frac{\sqrt{239}+\sqrt{240}}{\sqrt{239}}}\\
&=\frac{\sqrt{239}}{-\sqrt{239}+\sqrt{240}}-\frac{\sqrt{239}}{\sqrt{239}+\sqrt{240}}\\
&=\frac{\sqrt{239}\left(\sqrt{239}+\sqrt{240}\right)-\sqrt{239}\left(-\sqrt{239}+\sqrt{240}\right)}{\left(-\sqrt{239}+\sqrt{240}\right)\left(\sqrt{239}+\sqrt{240}\right)}\\
&=\frac{\sqrt{239}\cdot 2\cdot\sqrt{239}}{240-239}=478.
\end{aligned}$$

A resposta certa é alternativa **D**.

59. Qual é o gráfico da função quadrática da função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ com $a>0$, $b<0$ e $c>0$?



Resolução: Função quadrática com $a > 0$ possui concavidade voltada para cima, alternativas B e D. O gráfico que corresponde à uma expressão analítica que tem $c > 0$ é a função na qual ordenada na origem é positiva, que é o caso da alternativa D e $b < 0$ nos indica o sinal do $x_v > 0$, neste caso temos como alternativa certa **D**.

60. Quais são as coordenadas do vértice da parábola que é o gráfico da função $f(x) = 49 + 54x + 27x^2$

A: $(-2; 49)$ B: $(2; 265)$ C: $(0; 49)$ D: $(1; 130)$ E: $(-1; 22)$

Resolução: As coordenadas do vértice são dadas por; $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{54}{2 \cdot 27} = -1$ e $y_v = f(x_v) = 49 - 54 + 27 \cdot (-1)^2 = 22$. Logo a resposta certa é **E**.

Exame de Matemática de 2020B

Correcção do exame de Matemática de 2020 B

1. O número $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{9^{1/2}}}$ corresponde a qual das seguintes alternativas?

   A: $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{9/2}}$ B: $\frac{\sqrt{12}}{3}$ C: 2 D: $(\frac{4}{3})^{1/2}$ E: $\frac{4}{3}$

   Resolução: Temos: $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{9^{1/2}}} = \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{\sqrt{9}}} = \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$. Então, a resposta certa é a alternativa **C**.

   - A alternativa A não está certa, pois, $9^{1/2} \neq \frac{9}{2}$.
   - A alternativa B não está certa, pois, $\sqrt{9^{1/2}} = \sqrt{3} \neq 3$.
   - As alternativas D e E não estão certas, pois, não se pode simplificar os radicandos, sem primeiro reduzir tanto o numerador como o denominador ao mesmo radical.

2. Qual é o valor de $(-\frac{3}{5})^2 \cdot (\frac{2}{3})^2 + 8 : 8^{1/3}$?

   A: 2,21 B: 5,56 C: 1,25 D: 4,16 E: 3,84

   Resolução: Temos:

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 8 : 8^{1/3} = \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + 8 : (2^3)^{1/3}$$
$$= \frac{9}{25} \cdot \frac{4}{9} + 8 : 2^{3/3} = \frac{4}{25} + 8 : 2 = \frac{4}{25} + 4 = 0,16 + 4 = 4,16.$$

   Então, a resposta certa é a alternativa **D**.

   - A alternativa E não está certa, pois, o quadrado de número real negativo é positivo.
   - Note que não se pode simplificar 8 com 8, pois, o divisor não é 8, mas sim $8^{1/3}$, deve ser feita primeira a operação de potência.

3. O Carlos e o Rui trabalham como animadores de festas. O Carlos cobra uma taxa inicial de 400 meticais e mais 80 meticais por cada hora adicional, enquanto o Rui cobra uma taxa inicial de 230 meticais e mais 140 meticais por hora adicional. Qual o tempo mínimo que deve durar a festa para ser mais vantajoso contratar o Carlos que o Rui?

   A: 7 B: 4 C: 2 D: 6 E: 9

   Resolução: Designepor por x o número de horas adicionais. O valor que o Carlos cobra é $400 + 80x$ meticais. O valor que o Rui cobra é $230 + 140x$ meticais. Para que seja mais vantajoso contratar o Carlos que o Rui, teremos o valor cobrado pelo Caros deve ser menor que o do Rui, ou seja, $400+80x < 230+140x$. Resolvendo a inequação teremos:

$$400 + 80x < 230 + 140x \Leftrightarrow 80x - 140x < 230 - 400 \Leftrightarrow -60x < -170$$
$$\Leftrightarrow (-1)(-60x) > (-1)(-170) \Leftrightarrow 60x > 170 \Leftrightarrow x > \frac{170}{60} \approx 3.$$

A resposta certa seria $\frac{17}{6}$ horas que é aproximadamente igual a 3 horas (assumindo que o número de horas pretendido é inteiro).

- Note que em 2 horas adicionais, o valor do Carlos é $400+80\cdot 2 = 560$ meticais e o do Rui $230+140\cdot 2 = 510$ meticais. É mais caro contratar o Carlos.
- Note que em 4 horas adicionais, o valor do Carlos é $400+80\cdot 2 = 720$ meticais e o do Rui $230+140\cdot 4 = 790$ meticais. É mais caro contratar o Rui. No entanto, em 3 horas adicionais, o valor do Carlos é $400 + 80 \cdot 3 = 640$ meticais e o do Rui $230 + 140 \cdot 3 = 650$ meticais. É mais caro contratar o Rui. E 3 é o número mínimo de horas (assumindo que número de horas é inteiro) em que é mais vantajoso contratar o Carlos.

4. Seja $x^2 + y^2 = 60$. Qual o valor positivo de $x + y$ sabendo que $xy = 20$:

   A: 5 B: 10 C: 15 D: 20 E: 25

   Resolução: Resolvemos o sistema de equações:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 60 \\ xy = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy - 2xy = 60 \\ xy = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 60 \\ xy = 20 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2\cdot 20 = 60 \\ xy = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 100 \\ xy = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \pm\sqrt{100} \\ xy = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \pm 10 \\ xy = 20 \end{cases}$$

   O valor positivo de $x + y$ é 10. A alternativa certa é **B**.

   - Note que as outras alternativas não satisfazem o sistema de quações. Por exemplo, se $x + y = 5$, usando $(x + y)^2 - 2xy = 60$, $xy = 20$ obtemos $25 - 40 = 60$ que não é verdade.

5. Sendo $x - y \neq 0$, a expressão $\frac{x^2-y^2}{x-y}$ é equivalente a:

   A: $x + y - 2xy$ B: $x + y$ C: $x - y$ D: $x^2 + y^2 + 2$ E: $2xy$

   Resolução: Temos:

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{(x + y)(x - y)}{(x - y)} = x + y,$$

   pois, $x - y \neq 0$. A resposta certa é a alternativa **B**.

   - Note que $x^2 - y^2 \neq (x - y)^2$ e não se pode simplificar sem factorizar o numerador, dai que não podemos ter alternativa C.
   - Podemos também verificar por meio de um contraexemplo, se $x = 2$, $y = 1$, $\frac{x^2-y^2}{x-y} = \frac{2^2-1^2}{2-1} = 3$ mas em A, B, D e E teremos valores diferentes de 3.

6. Indique a opção que apresenta todas soluções da equação $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

   A: $\frac{1}{2}$ B: 0 e $\frac{1}{2}$ C: $\frac{1}{2} - \sqrt{2}$, $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ D: 1 e 4 E: Nenhuma das anteriores

   Resolução: Temos:

$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}.$$

   A resposta certa é a alternativa **A**.

- Note que as outras respostas não estão correctas, pois, substituindo na equação não obtemos identidade.

7. Uma parede tem 9600cm^2 de área. Sabendo que a largura da parede é uma vez e meia da sua altura, quais são, em metros, as dimensões da parede?

   A: $1,6$ e 2,4 B: 80 e 100 C: 1920 e 2880 D: $0,6$ e 1,2 E: $0,8$ e 1,2

   Resolução: Seja x a altura da parede, assim a largura da parede é $1,5\cdot x=\frac{3}{2}x$. Desta forma, a área da parede é:

$$\text{Área} = x\cdot\frac{3}{2}x = 9600cm^2.$$

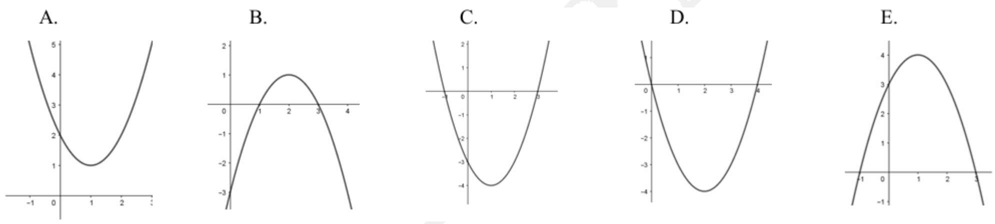
   Resolvendo a equação, teremos:

$$x\cdot\frac{3}{2}x = 9600 \Leftrightarrow x^2=\frac{2}{3}\cdot 9600 \Leftrightarrow x^2 = 6400 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{6400}=\pm 80cm.$$

   Assim, a altura é $80cm = 0,8m$ e a largura é $120cm = 1,2m$. A resposta certa é a alternativa **E**.

   - Note que as outras respostas não estão certas, pois, ao multiplicarmos não obtemos $0,96m^2$.

8. Seja $f(x)=x^2-2x-3$. Qual dos seguintes gráficos representa a função?



   Resolução: Temos $f(x)=x^2-2x-3=x^2-2x+1-1-3=(x-1)^2-4$. Assim, $f(x)=a(x-x_v)^2+y_v$, onde $x_v=1$, $y_v=-4$ e $a=1$. Assim, o vértice é o ponto (1,-4). Visto que $a>0$, o gráfico de $f(x)$ tem concavidade voltada para cima. Desta forma, a resposta certa é **C**.

   - Note que as outras alternativas não tem, simultaneamente, o vértice (1,-4) e a concavidade voltada para cima.

9. Um comerciante obtém, pela venda de garrafas de água, um lucro dado pela função $L(x)=-5x^2+100x-80$, onde x é o número de garrafas vendidas e $L(x)$ o lucro em meticais. Indique qual o lucro máximo obtido pelo comerciante na venda das garrafas de água e qual o número de garrafas que se devem vender para alcançar esse valor?

   A: 2317 e 148 B: 1680 e 20 C: 420 e 10 D: 12 e 20 E: 580 e 12

   Resolução : Precisamos encontrar o valor máximo da função $L(x)$. Visto que $L(x)$ é uma função quadrática com $a=-5<0$, o gráfico tem a concavidade voltada para baixo. Logo, o valor máximo de $L(x)$ será o y_v. Determinemos as coordenadas do vértice. Temos:

$$\begin{aligned} L(x) &= -5x^2+100x-80 = -5(x^2-20x)-80 \\ &= -5(x^2-20x+10^2-10^2)-80 = -5(x-10)^2+500-80 \\ &= -5(x-10)^2+420. \end{aligned}$$

   Assim, $x_v=10$ e $y_v=420$. O lucro máximo é 420 e o número de garrafas que se devem vender para alcançar este valor é 10. A resposta certa é **C**.

- Note que as outras alternativas não são pontos do gráfico de $L(x)$.

10. Considere os seguintes conjuntos $A = [-3, 7]$, $B =]-3, 9]$ e $C = \{1, 7\}$. O conjunto $(A \cap B) \setminus C$ é dado por?

    A: $]-3, 9]$ B: $]-3, 7[\cup \{1, 7\}$ C: $\emptyset$ D: $]-3, 1[\cup]1, 7]$ E: $]-3, 1[\cup]1, 7] \cup]7, 9[$

    Resolução : Temos: $A \cap B = [-3, 7] \cap [-3, 9] = [-3, 7]$. Assim,

    $$(A \cap B) \setminus C = [-3, 7] \setminus \{1, 7\} = [-3, 1[\cup]1, 7[.$$

    A resposta certa é **D**.

    - Note que $E \setminus F$, é conjunto formado por elementos do conjunto E que não pertencem ao conjunto F.

11. Num bairro 1800 pessoas leêm o Jornal Azul ou o Jornal Verde. Destas, 1200 pessoas leêm o Jornal Azul e 800 pessoas leêm o Jornal Verde. Quantas pessoas leêm o Jornal Azul, mas não o Jornal Verde?

    A: 600 B: 400 C: 200 D: 800 E: 1000

    Resolução : Seja A o conjunto de pessoas que leêm o jornal azul, V o conjunto de pessoas que leêm o jornal verde. Assim, $\#(A)$ designa número de elementos do conjunto A. Temos: $\#(A \cup V) = 1800$, $\#(A) = 1200$, $\#(V) = 800$, e pretendem $\#(A \setminus V)$. Por propriedade de conjuntos, $A \setminus V = A \setminus (A \cap V)$. Assim, vamos determinar $\#(A \cap V)$. Temos:

    $$\#(A \cup V) = \#(A) + \#(V) - \#(A \cap V) \Leftrightarrow 1800 = 1200 + 800 - \#(A \cap V) \Leftrightarrow \#(A \cap V) = 200.$$

    Assim, $\#(A \setminus V) = \#(A) - \#(A \cap V) = 1200 - 200 = 1000$. A resposta certa é **E**.

    - Note que em geral $\#(A \setminus V) \neq \#(A) - \#(V)$, pois, nem sempre todos elementos de V são elementos de A.

12. Os valores de x que satisfazem a inequação $(x + 2)^2 < -1 + 10x$ correspondem ao conjunto definido por:

    A: $1 < x < 5$ B: $2 < x < 5$ C: $2 < x < 10$ D: $x < 10$ E: $x < 5$

    Reolução : Temos:

    $$\begin{gathered}(x + 2)^2 < -1 + 10x \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 < -1 + 10x \\ \Leftrightarrow x^2 + 4x - 10x + 4 + 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 < 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x - 1) < 0 \\ \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x - 5 < 0 \wedge x - 1 > 0 \\ \text{ou } x - 5 > 0 \wedge x - 1 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x < 5 \wedge x > 1 \\ \text{ou } x > 5 \wedge x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x \in \emptyset \\ \text{ou } 1 < x < 5. \end{array}\right.\end{gathered}$$

    Desta forma, a resposta certa é **A**.

    - Também pode-se usar o método gráfico para resolver a inequação.
    - Note que as restantes alternativas não estão correctas, pois, ou excluem alguns valores que fazem parte da solução ou icluem valores que não fazem parte da solução . Por exemplo, as alternativas B e C, excluem o ponto $x = 3/2$ que faz parte da solução , e as alternativas D e E, incluem o ponto $x = 0$ que não faz parte da solução.

13. A solução da inequação $x^2 - 9 \geq 0$ é:

    A: $x \leq -3 \vee x \geq 3$ B: $x \geq \pm 3$ C: $-3 \leq x \leq 3$ D: $x \leq \pm 3$ E: $\emptyset$

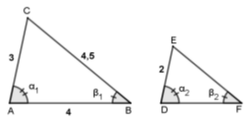
Resolução : Temos:

$$x^2-9\geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3\geq 0 \wedge x+3\geq 0 \\ \text{ou } x-3\leq 0 \wedge x+3\leq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3 \wedge x\geq -3 \\ \text{ou } x\leq 3 \wedge x\leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ \text{ou } x\leq -3. \end{cases}$$

Desta forma, a resposta certa é $x\leq -3 \ \vee x\geq 3$, ou seja, a alternativa **A**.

- Não se pode escrever $x\geq \pm 3$ e nem $x\leq \pm 3$.
- A alternativa C não está correcta, pois, contém números que não fazem parte da solução, por exemplo, $x=0$.
- A alternativa E não está correcta, pois, por exemplo $x=4$ satisfaz a inequação, pois, $4^2-9\geq 0$.

14. Tendo em conta as medidas dos lados dos triângulos apresentadas na figura e considerando $\alpha_1=\alpha_2$ e $\beta_1=\beta_2$, indique o perímetro do triângulo DEF:



A: 11,5 B: 8 C: 23/3 D: 6,25 E: 17/3

Resolução : Visto que $\alpha_1=\alpha_2$ e $\beta_1=\beta_2$ então, $\angle ACB=\angle DEF$, pois, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$. Desta forma, $\triangle ABC\sim\triangle DEF$ pelo critério ângulo, ângulo, ângulo. Assim,

$$\frac{|DE|}{|AC|}=\frac{|EF|}{|BC|}=\frac{|DF|}{|AB|}=\frac{2}{3},\quad |DE|=\frac{2}{3}|AC|,\ |EF|=\frac{2}{3}|BC|, |DF|=\frac{2}{3}|AB|.$$

O perímetro do $\triangle DEF$ é

$$P=|DE|+|EF|+|DF|=\frac{2}{3}(|AC|+|BC|+|AB|)=\frac{2}{3}(3+4,5+4)=\frac{23}{3}.$$

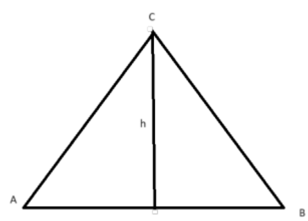
A resposta certa é **C**.

- Note que a alternativa A não está certa, pois, 11,5 é o perítetro do triângulo ABC e este é semelhante ao triângulo DEF com razão de proporcionalidade diferente de 1.

15. Considere um triângulo isósceles ABC com base $|AB|=12$, $|BC|=|AC|=10$. Qual a área deste triaângulo?

A: 120 B: 57 C: 60 D: 18 E: 48

Resolução : Consideremos a figura ao lado. A área do triângulo ABC é $\frac{|AB|\cdot h}{2}$, h é altura do triângulo. Podemos determinar h usando o teorema de Pitâgoras: $|AC|^2=(\frac{|AB|}{2})^2+h^2$. Teremos



$$10^2=6^2+h^2 \Longleftrightarrow h^2=64 \Longrightarrow h=8.$$

Assim, a área do triângulo ABC é $\frac{|AB|\cdot h}{2}=12\cdot 8\cdot\frac{1}{2}=48$. A resposta certa é E.

- Note que pelo facto do triângulo ABC ser isósceles, o segmento de recta baixado do vértice C até a base AB que é perpendicular à base e divide a base em dois segmentos iguais.

16. Quais as soluções da equação $\cos^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$, em radianos, onde $\theta \in [0, 2\pi[$.

A: $\theta = 0 \vee \theta = 1$ B: $\theta = \pi/4 \vee \theta = \pi/3 \vee \theta = \pi/2$ C: $\theta = 0 \vee \theta = \pi/2 \vee \theta = \pi$
D: $\theta = 0 \vee \theta = \pi$ E: $\theta = 0 \vee \theta = \pi/2 \vee \theta = \pi \vee \theta = 3\pi/2$

Resolução: Temos:

$$\cos^2\theta + \sin\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\theta - \sin^2\theta = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin\theta(1 - \sin\theta) = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0 \vee \sin\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 0 \vee \theta = \pi \vee \theta = \pi/2.$$

A resposta certa é **C**.

- As outras alternativas ou estão incompletas ou apresentam alguns valores de θ que não satisfazem a equação.

17. Simplificando a expressão $\cos(7680°)$.

A: 0 B: $-1/2$ C: $\sqrt{3}/2$ D: 1 E: $-\sqrt{2}/2$

Resolução: Temos $7680° = 360° \cdot 21 + 120°$. Em radianos, teremos $7680° = 21 \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3}$. Visto que a função $\cos(x)$ é periódica, de período 2π, temos:

$$\cos(7680°) = \cos(21 \cdot 2\pi + 2\pi/3) = \cos(2\pi/3) = -\cos(\pi - \frac{2\pi}{3}) = -\cos(\pi/3) = -\frac{1}{2}.$$

A resposta certa é **B**.

18. A negação da afirmação "Hoje é Sábado e amanhã não irá chover"é:

A. Hoje é Sábado ou amanhã irá chover.
B. Hoje não é Sábado e amanhã irá chover.
C. Hoje não é Sábado ou amanhã irá chover.
D. Hoje não é Sábado ou amanhã não irá chover.
E. Hoje é Sábado e amanhã não irá chover.

Resolução: Sejam p : "Hoje é sábado "e q : "Amanhã irá chover". As letras p e q representam duas proposições . A proposição composta, "Hoje é Sábado e amanhã não irá chover"é dada por $p \wedge \neg q$. A negação desta proposição é $\neg(p \wedge \neg q)$. Usando as leis de Morgan, teremos:

$$\neg(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg p \vee q.$$

Colocando em linguagem corrente, teremos: "Hoje não é Sábado ou amanhã irá chover".

A resposta certa é **C**.

- Note que fazendo a tabela de verdade, a alternativa C tem valores de verdade opostos ao da proposição composta correspondente à frase dada. As restantes alternativas não tem todos os valores de verdade opostos à $p \wedge \neg q$.

19. Considere a afirmação "Todos os alunos da professora Paula tiveram positiva no exame de Matemática.". Qual das seguintes opções é necessariamente verdadeira:

A. Se a Eduarda não é aluna da professora Paula, então ela não teve positiva no exame de Matemática.
B. Se o Carlos não teve positiva no exame de Matemática, então ele não é aluno da professora Paula.

C. Se a Márcia teve positiva no exame de Matemática, então ela é aluna da professora Paula.
D. Se a Luísa não teve positiva no exame de Matemática, então ela é aluna da professora Paula.
E. Se o Leonel teve positiva e Justino teve negativa no exame de Matemática, então eles têm professores diferentes.

Resolução: Sejam $p(x)$: "x é aluno da Professora Paula "e $q(x)$: "x teve nota positiva no exame de Matemática". As expressões $p(x)$ e $q(x)$ representam duas proposições para o aluno x. A proposição composta, "Todos os alunos da professora Paula tiveram positiva no exame de Matemática."é dada por $\forall x,\ p(x) \to q(x)$.

- **A alternativa B é verdadeira** pois, todos os alunos da Professora Paula tiveram positiva no exame de Matemática. Se um estudante não teve positiva no exame de Matemática, não é aluno da Professora Paula.
- A alternativa A é falsa pois, não sabemos o resultado dos alunos dos outros professores.
- A alternativa C é falsa pois, não podemos tirar conclusões sobre $p(x)$ a partir da suposição de $q(x)$. A Márcia pode ser aluna de outro professor.
- A alternativa D é falsa, pois, todos os alunos da Professora Paula tiveram positiva no exame de Matemática. Se um estudante não teve positiva no exame de Matemática, não é aluno da Professora Paula.
- A alternativa E é falsa, pois, não sabemos o resultado dos alunos dos outros professores.

20. Racionalize o denominador da expressão $\frac{x}{\sqrt{x+9}-3}$ e simplifique-a. O resultado será:

A: $\sqrt{x}$ B: $\frac{x}{\sqrt{x+9}}$ C: $\sqrt{x+9}+3$ D: $\frac{x-3}{x+3}$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução: Temos:

$$\frac{x}{\sqrt{x+9}-3} = \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{(x+9)^2}-3^2)} = \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{x+9-9} = \sqrt{x+9}+3.$$

A resposta certa é **C**.

21. Quais os valores que satisfazem a inequação $\sqrt{2x^2+x} > 1$:

A: $x \in]-\infty, 1[\cup[4,\infty[$ B: $x \in]-\infty,-2[\cup]-2,-1[$ C: $x \in]-\infty,-1[\cup[1/2,\infty[$ D: $x \in]-2,-1[$

E: $x \in]-\infty,-2[\cup[-2,1[\cup]1,\infty[$

Resolução: Por condição de existência da raíz quadrada, $2x^2+x \geq 0$. Assim,

$$\sqrt{2x^2+x} > 1 \Longrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2x^2+x})^2 > 1 \\ 2x^2+x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x^2+x-1 > 0 \\ x(2x+1) \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (2x-1)(x+1) > 0 \\ x(2x+1) \geq 0. \end{cases}$$

Resolvemos a inequação $(2x-1)(x+1) > 0$. Temos:

$$2x-1 > 0 \wedge x+1 > 0 \text{ ou } 2x-1 < 0 \wedge x+1 < 0$$
$$x > 1/2 \wedge x > -1 \text{ ou } x < 1/2 \wedge x < -1$$
$$x > 1/2 \text{ ou } x < -1.$$

Resolvemos a inequação $x(2x+1) \geq 0$. Temos:

$$2x+1 \geq 0 \wedge x \geq 0 \text{ ou } 2x+1 \leq 0 \wedge x \leq 0$$

$$x \geq 1/2 \wedge x \geq 0 \text{ ou } x \leq 1/2 \wedge x \leq 0$$
$$x \geq 1/2 \text{ ou } x \leq 0.$$

Assim,

$$\begin{cases} (2x-1)(x+1) > 0 \\ x(2x+1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1/2 \text{ ou } x < -1 \\ x \geq 1/2 \text{ ou } x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x > 1/2 \text{ ou } x < -1.$$

A resposta certa é **C**.

22. Considere o sistema de equações lineares $\begin{cases} 3x+2y-z=0 \\ x+3y+z=1 \\ 2x+2y-2z=2. \end{cases}$ Qual é a solução do sistema?

A: $(x,y,z) = (-1,2,3)$ B: $(x,y,z) = (0,0,0)$ C: $(x,y,z) = (-1,1,-1)$
D: Não existem soluções E: $(x,y,z) = (4,-5,2)$

Resolução: Usando o método de Crammer, temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right| = 3\cdot 3\cdot(-2) + 2\cdot 1\cdot 2$$
$$+(-1)\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot(-1) - 2\cdot 1\cdot 3 - (-2)\cdot 1\cdot 2 = -12.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right| = 0\cdot 3\cdot(-2) + 2\cdot 1\cdot 2$$
$$+(-1)\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot(-1) - 2\cdot 1\cdot 0 - (-2)\cdot 1\cdot 2 = 12.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right| = 3\cdot 1\cdot(-2) + 0\cdot 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1\cdot 2$$
$$-2\cdot 1\cdot(-1) - 2\cdot 1\cdot 3 - (-2)\cdot 1\cdot 0 = -12.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right| = 3\cdot 3\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 2 + 0\cdot 1\cdot 2$$
$$-2\cdot 3\cdot 0 - 2\cdot 1\cdot 3 - 2\cdot 1\cdot 2 = 12.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{12}{-12} = -1,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-12}{-12} = 1,\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{12}{-12} = -1$$

A resposta é **C**.

- Note que a solução existe e é única. As alternativas A, B e D não satisfazem o sitema de equações .

23. Sabendo que uma das raízes da equação $x^3+x^2-4x=4$ é $x=-2$, qual será o produto das outras raízes?

A: 3 B: -2 C: $\sqrt{3}$ D: 1 E: Nenhuma das anteriores

Resolução: Usando a regra de Ruffini para dividir o polinômio x^3+x^2-4x-4 por $x+2$ obtemos:

	1	1	-4	-4
-2		-2	2	4
	1	-1	-2	0

Desta forma, $x^3+x^2-4x-4 = (x+2)(x^2-x-2)$. Logo, o produto das outras raízes é -2. A resposta certa é **B**.

24. Resolva a inequação $(\frac{1}{2})^{3x-x^2} > 1$. Qual é a solução ?

A: $x \in]-\infty, 0[$ B: $x \in]-\infty, 0[\cup]3, \infty[$ C: $x \in]0, 3[$ D: $x \in]-3, 3[$ E: $x \in]-\infty, -3[\cup]0, \infty[$

Resolução: Temos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Longrightarrow 3x - x^2 < 0 \Longrightarrow x(3-x) < 0$$
$$x > 0 \wedge 3 - x < 0 \text{ ou } x < 0 \wedge 3 - x > 0$$
$$x > 0 \wedge -x < -3 \text{ ou } x < 0 \wedge -x > -3$$
$$x > 0 \wedge x > 3 \text{ ou } x < 0 \wedge x < 3$$
$$x > 3 \text{ ou } x < 0.$$

A resposta é **B**.

- As outras respostas não estão certas, pois, ou excluem valores que fazem parte do conjunto solução ou incluem valores que não fazem parte da solução . Por exemplo, em A, $x = 4$ obtemos $16 > 1$, satisfaz a inequação mas não está incluso no conjunto solução. Em C, D e E, para $x = 1$ obtemos $\frac{1}{4} > 1$, não satisfaz a inequção mas está incluido nestes conjuntos.

25. Considere a proposição $a^{2x+3} > a^8$ na qual x é uma variável real e a é uma constante real positiva. A proposição é verdadeira se:

A: $x = 2$, $a > 1$ B: $x = -2$, $a < 1$ C: $x = 3$, $a < 1$ D: $x = -3$, $a > 1$ E: $x = 4$, $a < 1$

Resolução: Consideremos dois casos:

caso 1: $a > 1$ temos:

$$a^{2x+3} > a^8 \Longrightarrow 2x + 3 > 8 \Longrightarrow 2x > 5 \Longrightarrow x > \frac{5}{2}.$$

caso 2: $a < 1$ temos:

$$a^{2x+3} > a^8 \Longrightarrow 2x + 3 < 8 \Longrightarrow 2x < 5 \Longrightarrow x < \frac{5}{2}.$$

A resposta certa é **B**.

- As outras alternativas não satisfazem as condições otidas tanto no caso 1 como no caso 2.

26. Qual das seguintes opções representa a solução da equação $3^{2x} = 3^x + 12$?

A: $x = 0$ B: $x = \log_3^4$ C: $x = \log_3^{12}$ D: $x = \log_3^3$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução: Temos $3^{2x} = 3^x + 12 \Longleftrightarrow (3^x)^2 - 3^x - 12 = 0$. Seja $t = 3^x > 0$. Teremos:

$$(3^x)^2 - 3^x - 12 = 0 \Longrightarrow t^2 - t - 12 = 0 \Leftrightarrow (t+3)(t-4) = 0$$
$$\Longrightarrow t = -3 \vee t = 4.$$

Visto que $t > 0$, consideramos apenas $t = 4$. Da equação $3^x = 4$ resulta $x = \log_3^4$. A resposta certa é bf B.

- As alternativas A, C e D não estão certas, pois, não satisfazem a equação.

27. Para que valores de x é válida a inequação $25^{2x+1} > \sqrt{5^{6+x}}$?

    A: $x \in \mathbb{R}$ B: $x < \frac{1}{9}$ C: $x > \frac{2}{7}$ D: $x < -6$ E: Nenhuma das anteriores

    Resolução: Temos:

$$25^{2x+1} > \sqrt{5^{6+x}} \Longleftrightarrow 5^{4x+2} > 5^{\frac{6+x}{2}} \Longrightarrow 4x+2 > \frac{6+x}{2} \Leftrightarrow 8x+4 > 6+x \Leftrightarrow 7x > 2 \Longrightarrow x > \frac{2}{7}.$$

    A resposta certa é **C**.

    - As alternativas A, B e D não estão certas, pois, ou excluem valores que fazem parte do conjunto solução ou incluem valores que não fazem parte da solução . Por exemplo, em A e B, para $x = 0$ obtemos $25 > 125$. Em D, $x = -10$ não satisfaz a inequação .

28. Que valores de x representa a solução da equação $\log_5(x+1) + \log_5(2x+3) = 0$?

    A: $x \in \{-3; -2\}$ B: $x \in \{-3/2; -1\}$ C: $x = -\frac{3}{2}$ D: $x \in [-2, -1[$ E: $x = -1/2$.

    Resolução: Tendo em conta as condições de existência de logaritmo, temos $x+1 > 0$ $(x > -1)$ e $2x+3 > 0$ $(x > -3/2)$. Uando propriedades, temos:

$$\begin{aligned} \log_5(x+1) + \log_5(2x+3) = 0 &\Longleftrightarrow \log_5(x+1)(2x+3) = \log_5 1 \\ &\Longrightarrow (x+1)(2x+3) = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} \Longrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -2. \end{aligned}$$

    A solução é $x = -1/2$ pois, $-1/2 > -1$. De referir que $x = -2$ não é solução , pois, não satisfaz $-2 > -1$. A resposta certa é **E**.

29. Indique o conjunto que representa as soluções da inequação $\log_{1/2}^{(3x)} > \log_{1/2}^{(2x+5)}$.

    A: $x \in]0, 5[$ B: $x \in]-5/2, 0[$ C: $x \in]-\infty, 5[$ D: $x \in [2, 5[$ E: $x \in]2, 3[$

    Resolução: Tendo em conta as condições de existência de logaritmo, temos $3x > 0$ $(x > 0)$ e $2x+5 > 0$ $(x > -5/2)$. Uando propriedades, temos:

$$\log_{1/2}^{(3x)} > \log_{1/2}^{(2x+5)} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3x < 2x+5 \\ x > 0 \\ x > -\frac{5}{2} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x < 5 \\ x > 0 \\ x > -\frac{5}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow 0 < x < 5.$$

    A resposta certa é **A**.

    - As outras respostas não estão certas, pois, ou excluem valores que fazem parte do conjunto solução ou incluem valores que não fazem parte da solução . Por exemplo, em B e C, $x = -1$ não pertence ao domínio de $\log_{1/2}^{(3x)}$. Em D e E, $x = 1$ satisfaz a inequção mas não foi incluido nestes conjuntos.

30. A equação $\log_3 x = 1 + \log_x 9$ tem duas raizes reais. O seu produto é:

    A: 0 B: 1/3 C: 9 D: 6 E: 3

    Resolução: Tendo em conta as condições de existência de logaritmo, temos $x > 0$ e $x \neq 1$. Uando propriedades, temos:

$$\log_3 x = 1 + \log_x 9 \Longleftrightarrow \log_3 x = 1 + 2\log_x 3 \Longleftrightarrow \log_3 x = 1 + \frac{2}{\log_3^x}.$$

Fazendo $t = \log_3^x$, teremos:

$$\log_3 x = 1 + \frac{2}{\log_3^x} \Leftrightarrow t = 1 + \frac{2}{t} \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+1) = 0 \Longrightarrow t = 2 \vee t = -1.$$

Para $t = -1$, da equação $\log_3^x = -1$ implica $x = \frac{1}{3}$. Para $t = 2$, da equação $\log_3^x = 2$ implica $x = 9$. Assim, o produto de 9 e $1/3$ é 3. A resposta certa é **E**.

31. Qual a solução da equação $\sqrt{x^2-4}\log_3^{(x+5)} \leq 0$?

A: $\emptyset$ B: $\mathbb{R}$ C: $x \in]-5,-4[$ D: $x \in]-\infty,-4[$ E: $x = \pm 2$

Resolução: Tendo em conta as condições de existência de logaritmo e da raíz quadrada, temos $x+5>0$ $(x>-5)$, $x^2-4 \geq 0$. Assim,

$$\sqrt{x^2-4}\log_3^{(x+5)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3^{(x+5)} \leq 0 \\ x > -5 \\ x^2-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3^{(x+5)} \leq \log_3^1 \\ x > -5 \\ (x+2)(x-2) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x+5 \leq 1 \\ x > -5 \\ x-2 \geq 0 \wedge x+2 \geq 0 \text{ ou } x-2 \leq 0 \wedge x+2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \\ x > -5 \\ x \geq 2 \text{ ou } x \leq -2 \end{cases} \Longrightarrow -5 < x \leq -4.$$

A resposta certa é **C**.

32. Qual das seguintes expressões desceve a equação da recta r que é perendicular à recta t: $y = 2x+2$, sabendo que as rectas se intersectam no ponto $(-6/5, -2/5)$?

A: $y = -\frac{x}{2} - 1$ B: $y = 4x+3$ C: $y = 2$ D: $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ E: $y = -x$

Resolução: A recta r tem a forma $y = a(x-x_0)+y_0$, onde a satisfaz $a \cdot 2 = -1$ (condição de perpendicularidade de rectas) e (x_0, y_0) é um ponto da recta. Temos:

$$a = -\frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{6}{5}\right) - \frac{2}{5} = -\frac{x}{2} - 1.$$

A resposta certa é **A**.

33. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções lineares, com coeficientes angulares k_f e k_g, respectivamente. Considere os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ tal que $x_1 < x_2$. Se $f(x_1) < g(x_1)$ e $f(x_2) = g(x_2)$ então:

A: $k_f = k_g$ B: $k_f < k_g$ C: $k_f > k_g$ D: Nada se conclui E: $k_g = 2k_f$

Resolução: As funções tem a forma $f(x) = k_f(x-x_1) + f(x_1)$,
$g(x) = k_g(x-x_1) + g(x_1)$. Temos: $f(x_2) = g(x_2)$ então

$$\begin{aligned} k_f(x_2-x_1) + f(x_1) &= k_g(x_2-x_1) + g(x_1) \\ \Rightarrow &\quad k_f(x_2-x_1) - k_g(x_2-x_1) = g(x_1) - f(x_1) \\ \Rightarrow &\quad (k_f-k_g)(x_2-x_1) = g(x_1) - f(x_1) \\ \Rightarrow &\quad k_f - k_g = \frac{g(x_1)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0. \end{aligned}$$

Assim, $k_f > k_g$. A resposta certa é **C**.

34. Considere a circunferência de centro (-3,-2) e raio 4. Qual dos seguintes pontos pertence à circunferência?

A: $(-3,-2)$ B: $(1,1)$ C: $(-3,2)$ D: $(1,0)$ E: $(-1,-3/2)$

Resolução: A equação da circunferência de entro (x_0, y_0) e raio r tem a forma $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$. Assim, a circunferência dada tem a forma $(x+3)^2+(y+2)^2 = 4^2$. Um ponto pertence à circunferência se satisfaz a equação . Verifiquemos os pontos dados:

- $(-3,-2)$ é o centro da circunferência, não pertence à mesma;
- $(1,1)$ temos $(1+3)^2+(1+2)^2 \neq 4^2$;
- $(-3,2)$ temos $(-3+3)^2+(2+2)^2 = 4^2$;
- $(1,0)$ temos $(1+3)^2+(0+2)^2 \neq 4^2$;
- $(-1,-3/2)$ temos $(-1+3)^2+(-3/2+2)^2 \neq 4^2$;

Vemos que apenas $(-3,2)$ pertence à circunferência. Logo. a resposta certa é **C**.

35. Seja $\mathcal{C}$ a cirncunfeência $(x-1)^2+(y+2)^2 = 3$ e r a recta $r: 2x-y+3=0$. $\mathcal{C}$ e r intersecta-se:

A: Em 1 ponto B: Num número infinito de pontos C: Em 2 pontos D: Em 0 pontos E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Temos:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2 = 3 \\ 2x-y+3=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2 = 3 \\ y = 2x+3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(2x+5)^2 = 3 \\ 2x-y+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-2x+1+4x^2+20x+25 = 3 \\ 2x-y+3=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5x^2+18x+23 = 0 \\ 2x-y+3=0 \end{cases}$$

Verifiquemos o nḿero de soluções da equação $5x^2+18x+23=0$. Temos $\Delta = 18^2 - 4\cdot 23\cdot 5 < 0$. Então, a equação $5x^2+18x+23=0$ não tem raízes reais. Desta forma, $\mathcal{C}$ e r não se intersectam. A resposta certa é **B**.

- Também pode -se resolver graficamente, esboçando as linhas $\mathcal{C}$ e r.

36. Se $x \in [0,\pi]$, determine o conjunto no qual $2\cos(2x)-1 \geq 0$.

A: $x \in [0,\pi/2]\cup[2\pi/3,\pi]$ B: $x = \pi/2 \wedge x = \pi/3$ C: $x \in [0,\pi]$ D: $x \in [0,\pi/6]$ E: $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Resolução : Temos:

$$2\cos(2x)-1 \geq 0 \Longrightarrow \cos(2x) \geq \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{2} \leq \cos(2x) \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq 2x \leq \pi/3 \Longrightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}.$$

A resposta certa é **D**.

37. O período da função $y = 2\sin(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{6})$ é:

A: $3\pi/4$ B: $2\pi/3$ C: $3\pi/2$ D: $4\pi/3$ E: $7\pi/6$

Resolução : Temos:

$$2\sin\left(\frac{3}{2}(x+T)-\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{6}\right) \Longrightarrow 2\sin\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{6}+\frac{3T}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Longrightarrow 2\sin\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{6}+\frac{3T}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Longrightarrow 4\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}+\frac{3T}{4}\right)\sin\left(\frac{3T}{4}\right) = 0, \forall x$$

$$\Longrightarrow \sin\left(\frac{3T}{4}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{3T}{4} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Tomando k o menor inteiro positivo, temos $T = 4\pi/3$. Desta forma, $T = \frac{4\pi}{3}$. A resposta certa é **D**.

- Usamos a fórmula $\sin a - \sin b = 2\cos(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$.
- Usando a relação $f(x+T) = f(x),\ \forall x$, podemos provar que as outras alternativas não estão certas. Por exemplo, em A, $T = \pi/4$, temos para $x = 0$, $\sin(0 - \pi/6) \neq \sin(0 + \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) = 0$. Em B, $T = 2\pi/3$, temos para $x = 0$, $-\frac{1}{2} = \sin(0 - \pi/6) \neq \sin(0 + \frac{2}{3}\cdot\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

38. As raízes da equação $\tan(x)\cdot\cot(x) + \sin(4x) = 1$, definem-se pela fórmula (onde $n \in \mathbb{Z}$):

A: $\frac{\pi}{4}n$ B: $\pm\frac{\pi}{4} + 2n\pi$ C: $\frac{\pi}{2}n$ D: πn E: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$

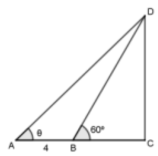
Resolução : Temos:

$$\tan(x)\cdot\cot(x) + \sin(4x) = 1 \Rightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\cdot\frac{\cos(x)}{\sin(x)} + \sin(4x) = 1,$$
$$\cos(x)\sin(x) \neq 0, \Rightarrow 1 + \sin(4x) = 1,\ \frac{1}{2}\sin(2x) \neq 0$$
$$\sin(4x) = 0,\ 2x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4x = \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}n \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}n,\ x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}n,\ n \text{ é número inteiro e ímpar } \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}(2n+1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n.$$

A resposta mais próxima a esta é **E**.

- As outras alternativas não estão correctas, pois, ou excluem algumas soluções ou incluem valores que não pertencem ao conjunto solução. Por exemplo, em A e C, $x = \pi/2$ não é solução pois não pertence ao domínio da função $\tan(x)$. A alternativa B não inclui a solução $x = \frac{3\pi}{4}$. A alternativa D inclui $x = \pi$ que não é solução pois não pertence ao domínio da função $\cot(x)$.

39. Observe a seguinte figura. Quanto medem o ângulo θ e o segmento $|AC|$, sabendo que $|CD| = \sqrt{12}$.



A: $\theta = 45°$ e $|AC| = 8$ B: $\theta = 30°$ e $|AC| = 6$ C: $\theta = 15°$ e $|AC| = 6$
D: $\theta = 30°$ e $|AC| = 8$ E: $\theta = 15°$ e $|AC| = 8$

Resolução : No triângulo ECD, $60° + 90° + \angle CDE = 180°$ então, $\angle CDE = 30°$. Desta forma,

$$\tan\angle CDE = \frac{|BC|}{DC} \Longrightarrow |BC| = \tan 30°\cdot|DC| = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{12} = 2.$$

Assim, $|AC| = |AB| + |BC| = 4 + 2 = 6$. Para determinar a medida do ângulo θ, determinamos

$$\tan\theta = \frac{|DC|}{|AC|} = \frac{\sqrt{12}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Assim, $\theta = 30°$. Desta forma, a resposta certa é **B**.

40. Para que valores de x é válida a equação $|x+\pi| = -(x+\pi)$?

A: $x > 0$ B: $x = -\pi$ C: $x > \pi$ D: $x \leq -\pi$ E: $x > -\pi$

Resolução : Temos, $|x+\pi| = \begin{cases} x+\pi, \text{ se } x+\pi > 0 \\ 0, \text{ se } x = -\pi \\ -(x+\pi), \text{ se } x+\pi < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+\pi, \text{ se } x > -\pi \\ 0, \text{ se } x = -\pi \\ -(x+\pi), \text{ se } x < -\pi. \end{cases}$

A resposta certa é **D.**

•A alternativa B não esta certa pois exclui muitas soluções. As restantes alternativas não satisfazem a equação.

41. Qual o conjunto S, das soluções da inequção $|2x+1| + 4 - 3x > 0$?

A: $S =]-\infty, 5[$ B: $S = [0,2]$ C: $S = [3, +\infty[$ D: $\emptyset$ E: $S = \{0, 1, 7\}$

Resolução : Usando a definição de módulo e sintetizando numa tabela, teremos:

x	$]-\infty, -\frac{1}{2}[$	$[-\frac{1}{2}, \infty[$
$\|2x+1\|$	$-2x-1$	$2x+1$
$4-3x$	$4-3x$	$4-3x$
Soma	$3-5x$	$5-x$

Assim,

$$|2x+1| + 4 - 3x > 0$$
$$\Leftrightarrow \{3 - 5x > 0, \text{ se } x < -\frac{1}{2} \text{ ou } 5 - x > 0, \text{ se } x \geq -\frac{1}{2}\}$$
$$|2x+1| + 4 - 3x > 0 \Leftrightarrow \{x < \frac{3}{5}, \quad \text{se } x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x < 5, \quad \text{se } x \geq -\frac{1}{2}\}$$
$$|2x+1| + 4 - 3x > 0 \Leftrightarrow \{x < -\frac{1}{2} \text{ ou } -\frac{1}{2} \leq x < 5\}$$
$$|2x+1| + 4 - 3x > 0 \Leftrightarrow x < 5.$$

A resposta certa é **A**.

- As outras alternativas não estão certas, pois, ou não incluem todos valores do conjunto solução ou incluem valores que não fazem parte da solução. Por exemplo, em C, tomando $x = 10$ e substituirmos na inequação, obtemos $-5 > 0$.

42. Considerando todos os divisores do número 60, determine a probabilidade de se escolher, ao acaso um número primo.

A: $0,25$ B: $0,3$ C: $1,2$ D: $0,6$ E: $0,75$

Resolução : Os divisores de 60 são, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60. No total são 12. Destes, 3 são númeors primos. Assim, a probabilidade de escolher um número primo é

$$P = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{3}{12} = 0,25.$$

A resposta certa é **A**.

- É erro típico considerar que 1 é número primo.

43. Para o registo num site é necessária uma palavra passe formada por 2 algarismos e 2 letras (maiúsculas e minúsculas). Considerando que na palavra passe as letras maiúsculas e minúsculas são diferentes, quantas palavras passe podem existir?

A: $10^2 26^2(4!/2!)$ B: $10^2 26^2$ C: $10^2 52(4!/2!)$ D: $10^2 52^2$ E: $10^2 52^2(4!/(2!2!))$

Resolução : Vamos usar o princípio do poduto. Temos 10 possibilidades de escolher o primeiro dígito e de novo 10 possibilidades para o segundo dígitos. Temos 26 possibilidades de escolher a primeira letra e de novo 26 possiilidades para escolher a segunda letra. Temos: $10^2 \cdot 26^2$. A resposta certa é **B.**

44. Numa equipa de futebol de salão composta por 12 jogadores, de quantas formas diferentes pode o treinador escolher os cinco jogadores que participarão num jogo?

A: 60 B: 792 C: 453 D: 826 E: 144

Resolução :

Temos um agrupamento de 12 pessoas tomados 5 a cinco. A ordem não interessa, então

$$C_5^{12} = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7!} = \frac{4 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 9}{1} = 792.$$

A resposta certa é **B**.

45.

46. Indique a função inversa de $f(x) = \frac{2x-5}{-3x+11}$.

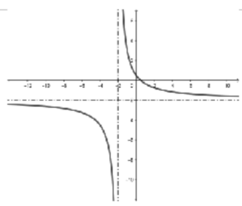
A: $y = \frac{-3x+11}{2x-5}$ B: $y = \frac{2x-5}{3x+11}$ C: $y = \frac{11x+5}{3x+2}$ D: $y = \frac{2x+11}{-3x-5}$ E: $y = \frac{2-5x}{-3+11x}$

Resolução : Temos, $x = \dfrac{2y-5}{-3y+11} \Longrightarrow x(-3y+11) = 2y-5 \Longrightarrow -3xy - 2y = -5 - 11x$

$$\Longrightarrow y(-3x-2) = -5 - 11x \Longrightarrow y = \frac{11x+5}{3x+2}.$$

A resposta certa é **C**.

- Note que a inversa de uma função real é única.
- As outras alternnativas não estão correctas pois, existem valores nos quais $f(x_0) = y_0$ mas $f^{-1}(y_0) \neq x_0$. Por exemplo, $f(5/2) = 0$ mas em A, $f^{-1}(0) = -\frac{11}{5} \neq \frac{5}{2}$.



47. Observe o gráfico. Qual das expressões corresponde à expressão da função representada no gráfico?

A: $y = \frac{-2x+1}{x+2}$ B: $y = \frac{2x+1}{x+2}$ C: $y = \frac{-2x+1}{x-2}$
D: $y = \frac{-2x-1}{x+1}$ E: $y = \frac{2x+1}{x-2}$

Resolução : O gráfico é uma função do tipo, $y = f(x) = \frac{Ax+B}{Cx+D}$, $C \neq 0$. Do gráfico, vemos que

$\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$. Então, $\frac{A}{C} = -2$. De outro lado, do gráfico $\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$, então, a recta $x = -2$ é assímptota vertical. Assim, $-\frac{D}{C} = -2$. Logo,

$$y = f(x) = \frac{Ax+B}{Cx+D} = \frac{-2Cx+B}{Cx+2C} = \frac{-2x+\frac{B}{C}}{x+2}$$

Do gráfico, vemos que o zero da função é um número positivo, então $\frac{B}{C} > 0$. A única expressão que satisfaz as condições descritas é a alternativa **A**.

- As outras alternativas estão erradas pois, pelo menos uma das assímptotas não corresponde às do gráfico apresentado.

48. A sequência a_1, a_2, $a_3, \ldots$ em que $a_k = -(0,5)^{-k}$, com $k \in \mathbb{N}$ é:

A. Progressão aritmética crescente.
B. Progressão geométrica crescente.
C. Progressão geométrica decrescente.
D. Progressão geométrica que não é crescente nem decrescente.
E. Sequência que não é progressão aritmética nem geométrica.

Resolução : Temos:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{-(0,5)^{-(k+1)}}{-(0,5)^{-k}} = (0,5)^{-1} = 2,\ k = 1, 2, \ldots$$

Ou seja, a_k é uma progressão geométrica de razão 2. Temos:

$$a_1 = -2,\ q = 2 > 1$$

então a_k é decrescente. A resposta certa é **C**.

49. Na progressão $1, 3, 9, 27, 81, \ldots$ a soma dos n primeiros termos é 364. Qual o n?

A: 6 B: 72 C: 4 D: 16 E: 7

Resolução : Temos:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3,\ n = 1, 2, \ldots$$

Ou seja, a_n é uma progressão geométrica de razão 3. Temos:

$$a_1 = 1,\ q = 3 \Longrightarrow a_n = a_1 q^{n-1} = 3^{n-1},\ n \in \mathbb{N}.$$

A soma dos primeiros n termos é:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Longrightarrow 364 = \frac{1(1-3^n)}{1-3} \Longrightarrow -728 = 1 - 3^n$$
$$\Longrightarrow 729 = 3^n \Longrightarrow 2^6 = 3^n \Longrightarrow n = 6.$$

A resposta certa é **A**.

- Note que calculando a soma dos primeiros n termos, sendo n o valor indicado nas restantes alternativas, o resultado não é 364. Por exemplo, em C, $S_4 = 1 + 3 + 9 + 27 = 40$.

50. Qual o limite da sucessão de termo geral $u_n = 1 + e^{-2n},\ n \in \mathbb{N}$?

A: $-\infty$ B: 2 C: 1 D: 2 E: ∞

Resolução : Temos:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(1+e^{-2n}) = 1 + \lim_{n\to+\infty} e^{-2n} = 1.$$

A resposta certa é **C**.

- Note que o limite quando existe é único.

51. Indique qual é o $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n}$.

A: 2/3 B: $e^{2/3}$ C: π D: ∞ E: 1

Resolução : Temos $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n} = 1^{\infty}$ que é uma indeterminação. Usando o limite notável

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e,$$

teremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n\cdot\frac{2}{3}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^{2/3}\\
&= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^{2/3} = e^{2/3}.
\end{aligned}$$

A resposta certa é **B**.

52. O $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-3x}{x^2-5x+6}$ é:

A: 2 B: ∞ C: Não existe D: 6 E: 3

Resolução : Temos $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-3x}{x^2-5x+6} = \frac{3^2-3\cdot3}{3^2-5\cdot3+6} = \frac{0}{0}$ que é uma indeterminação. Factorizando tanto o numerador como o denominador, teremos:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-3x}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to3}\frac{x(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to3}\frac{x}{x-2} = 3.$$

A resposta certa é **E**.

53. Qual o valor de $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x-\sqrt{2x}}$?

A: 4 B: ∞ C: 2 D: -2 E: 0

Resolução : Temos $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x-\sqrt{2x}} = \frac{2^2-3\cdot2+2}{2-\sqrt{2\cdot2}} = \frac{0}{0}$ que é uma indeterminação. Multiplicando e divindo pelo conjugado do denomiandor e factorizando a expressão resultatnte, tanto o numerador como o denominador, teremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x-\sqrt{2x}} &= \lim_{x\to2}\frac{(x^2-3x+2)(x+\sqrt{2x})}{(x-\sqrt{2x})(x+\sqrt{2x})}\\
&= \lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-1)(x+\sqrt{2x})}{(x^2-2x)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)(x+\sqrt{2x})}{x(x-2)}.\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x+\sqrt{2x})}{x}\\
&= \frac{(2-1)(2+\sqrt{2\cdot 2})}{2}=2.
\end{aligned}
$$

A resposta certa é **C**.

54. Na função $f(x)=\begin{cases} 2, & x\le -1\\ ax+b, & -1<x<3,\\ -2, & x\ge 3\end{cases}$ que valores devem assumir a e b para que $f(x)$ seja contínua?

A: $a=2,\ b=-1$ B: $a=1,\ b=1$ C: $a=0,\ b=2$
D: $a=-1,\ b=1$ E: $a=-2,\ b=3$

Resolução : A condição de condinuidade no ponto x_0 é:

$$f(x_0)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

Analizemos esta condição nos pontos que suscitam dúvida. Para $x=-1$, temos

$$
\begin{gathered}
f(-1)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^-} f(x)\\
2=-a+b=2.
\end{gathered}
$$

Para $x=3$, temos

$$
\begin{gathered}
f(3)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^-} f(x)\\
-2=-2=3a+b.
\end{gathered}
$$

Assim, usando estas igualdades, teremos:

$$\begin{cases} -a+b=2\\ 3a+b=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2+a\\ 3a+2+a=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2+a\\ 4a=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1\\ a=-1.\end{cases}$$

A resposta certa é **D**.

- Note que com outros valores de a e b, a função $f(x)$ não satisfaz a condição de continuidade em pelo menos um dos pontos $x=-1$ e $x=3$.

55. Indique a derivada de $f(x)=2\sqrt{x}+\frac{3}{x}$.

A: $f(x)=\sqrt{x}-\frac{3}{x}$ B: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x^2}$ C: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x^2}$
D: $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x^2}$ E: $f(x)=2\sqrt{x^3}-\frac{3}{x^2}$

Resolução :

Usando a fórmula $(\frac{k}{x})'=-\frac{k}{x^2}$, k constante, temos:

$$f'(x)=(2\sqrt{x})'+\Big(\frac{3}{x}\Big)'=(2x^{\frac{1}{2}})'-\frac{3}{x^2}=2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x^2}.$$

A resposta certa é **B**.

56. Seja f uma função real de variável real tal que $f(x) = f'(x)$, para todo e qualquer número real. Qual das seguintes epressões pode definir a função f?

A: $3x^2$ B: $\sin x$ C: e^{5x} D: $2e^x$ E: $\ln(x)$

Resolução : Verifiquemos qual das funções satisfaz a condição dada. Temos:

- em A, $f(x) = 3x^2$, $f'(x) = 6x$ e $3x^2 \neq 6x$, $x \neq 0$. Então, $f(x) = 3x^2$ não satisfaz $f(x) = f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- em B, $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$ e $\sin x \neq \cos x$, $x \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Então, $f(x) = \sin x$ não satisfaz $f(x) = f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- em C, $f(x) = e^{5x}$, $f'(x) = 5e^{5x}$ e $e^{5x} \neq 5e^{5x}$. Então, $f(x) = e^{5x}$ não satisfaz $f(x) = f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- em D, $f(x) = 2e^x$, $f'(x) = 2e^x$ e $2e^x = 2e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Então, $f(x) = 2e^x$ satisfaz $f(x) = f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- em E, $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $\ln x \neq \frac{1}{x}$, $x > 0$. Então, $f(x) = \ln x$ não satisfaz $f(x) = f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

A resposta certa é **D**.

57. Qual das seguintes funções não possui tangente horizontal no ponto dado?

A: $f(x) = -x^2 - 1,\ x = 0$
B: $f(x) = x^2 - 1,\ x = 1$
C: $f(x) = x^3 - 6x,\ x = \sqrt{2}$
D: $f(x) = \sin x,\ x = \frac{\pi}{2}$
E: $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2,\ x = 2$

Resolução : Verifiquemos qual das funções não satisfaz a condição dada. Se a função $f(x)$ tem uma tangente horizontal no ponto x_0, então $f'(x_0) = 0$. Veriquemos esta condição :

- em A, $f(x) = -x^2 - 1$, $x = 0$, $f'(x) = -2x$ e $f'(0) = 0$. Então, $f(x) = -x^2 - 1$ tem uma tangente horizontal no ponto $x = 0$.
- em B, $f(x) = x^2 - 1$, $x = 1$, $f'(x) = 2x$ e $f'(1) = 2 \neq 0$. Então, $f(x) = x^2 - 1$ não tem uma tangente horizontal no ponto $x = 1$.
- em C, $f(x) = x^3 - 6x$, $x = \sqrt{2}$, $f'(x) = 3x^2 - 6$ e $f'(\sqrt{2}) = 0$. Então, $f(x) = x^3 - 6x$ tem uma tangente horizontal no ponto $x = \sqrt{2}$.
- em D, $f(x) = \sin x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $f'(x) = \cos x$ e $f'(0) = 0$. Então, $f(x) = \sin x$ tem uma tangente horizontal no ponto $x = \frac{\pi}{2}$. .
- em E, $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$, $x = 2$, $f'(x) = x^2 - 2x$ e $f'(2) = 0$. Então, $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$ tem uma tangente horizontal no ponto $x = 2$.

A resposta certa é **B**.

58. Se $f'(x) = \sqrt{x}$. A primitiva de $f'(x)$ é dada por:

A: $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ B: $\frac{3}{x^2}$ C: $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ D: $\frac{2}{\sqrt{x^3}}$ E: $\sqrt{x^3}$

Resolução : A primitiva de $f'(x)$ é:

$$\int f'(x)dx = \int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c,$$

onde c é uma constante arbitrária.

A resposta mais próxima a esta é a alternativa A que é um caso particular quando $c = 0$.

59. Sejam f, g e h três funções deriváveis em $\mathbb{R}$ tais que $h'(x) - (f' \cdot g)(x) = (f \cdot g')(x),\ f(2) = g(2) = 3$, $h(2) = (f(2) - 1)^2$. Qual das seguintes afirmações á correcta?

A: $h(x) = (f \cdot g)(x) + 5$ B: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} + 3$ C: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - 3$
D: $h(x) = (f \cdot g)(x) - 5$ E: $h(x) = (f \cdot g)(x) - 1$

Resolução : Escrevemos $h'(x)$ na forma

$$h'(x) = (f' \times g)(x) + (f \times g')(x)$$

Assim, a primitiva de $h'(x)$ é:

$$h(x) = (f \times g)(x) + k,$$

onde k é uma constante arbitrária. Visto que $h(2) = (f(2) - 1)^2$, teremos

$$h(2) = (f \times g)(2) + k \Longrightarrow (3 - 1)^2 = 3^2 + k \Longrightarrow k = -5.$$

Deste modo, $h(x) = (f \times g)(x) - 5$. A resposta certa é **D**.

- Note que as outras alternativas não estão certas, pois, ou a derivada não coincide com $h'(x)$ ou não satisfaz a condição $h(2) = (f(2) - 1)^2 = 4$. Por exemplo, em A $h(2) = 3^2 + 5 = 14 \neq 4$.

60. Considere a igualdade $x + (4 + y)i = (6 - x) + 2yi$, em que x e y são números reais e i é unidade imaginária. O módulo do número complexo $z = x + iy$, é um número:

A: Maior que 10 B: Quadrado perfeito C: Irracional
D: Racional não inteiro E: Primo

Resolução : Primeiro vamos determinar x e y. Temos:

$$x + (4 + y)i = (6 - x) + 2yi \Longrightarrow \begin{cases} x = 6 - x \\ 4 + y = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Assim, $z = 3 + 4i$ e o seu módulo é

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

A resposta certa é **E**.

- Note que 5 é menor que 10, não é quadrado perfeito, é racioanl e inteiro.

Exame de Matemática I de 2021

Correcção do exame de Matemática I de 2021

1. A fórmula de passagem da escala Celcius (C) apara a escala Fahrenheit (F) para medir a temperatura num ambiente, tem uma forma linear $F = aC + b$, $(a, b$ são coeficientes constantes). Sabe-se que $0°C$ coresponde a $32°\,F$ e $100°\,C$ corresponde a $212°\,F$. Qual é a temperatura de um ambiente na escala em Fahrenheit se na escala em Celcius o seu valor é $50°C$?

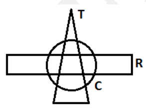
   A: 87 B: 98 C: 118 D: 122 E: 147

   Resolução: Temos $F = aC + b$. Sabe-se que $0°C$ coresponde a $32°\,F$, então $32 = b$. Mais, $100°\,C$ corresponde a $212°\,F$, então, $212 = 100a + c$. Temos:

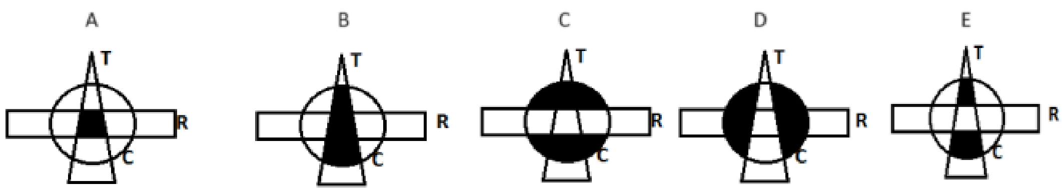
   $$212 = 100a + 32 \Longrightarrow a = \frac{180}{100} = \frac{9}{5}.$$

   Assim, $F = \frac{9a}{5} + 32$. Logo, $50°C$ corresponde à: $F = \frac{9}{5} \cdot 50 + 32 = 122°F$. A resposta certa é **D**.

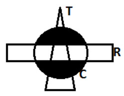
2. O conjunto $(C \setminus R) \cap T$ corresponde ao diagrama de Venn, na figura à abaixo,

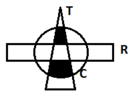
   onde T é o triângulo, R é o rectângulo, C é o círculo, é:

   Resolução : O conjunto $C \setminus R$ é:



Assim, quando intersectamos com T (o triângulo), obtemos:



A resposta certa é **E**.

- As outras alternativas não estão certas pois incluem elementos que não fazem parte do conjunto pretendido.

3. O intervalo de tempo médio estatístico de reacção de um motorista dum carro para começar a travagem extra, encontrando de repente um obstáculo no caminho, é de aproximadamente $[1,5;1,8]$ segundos. Qual é o intervalo de distância (em metros) que o percorre carro durante esse intervalo do tempo, se a sua velocidade for 60 kilómetros por hora?

   A: $[7,10]$ B: $[11,17]$ C: $[18,24]$ D: $[25,30]$ E: $[31,43]$

   Resolução : Considerando que neste momento a velocidade é constante, teremos:

   $$S(t) = v \cdot t,$$

   onde $v = 60km/h = \frac{60000m}{3600s} \approx 16,67m/s$ é a velocidade. Assim,

   $$S(1,5) = 16,67m/s \cdot 1,5s = 25m, \quad S(1,8) = 16,67m/s \cdot 1,8s = 30m.$$

   A resposta certa é **D**.

4. Sejam $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ dois números do conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$. Então $z_1 > z_2$ se:

   A: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, y_1 > y_2$
   B: $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, x_1 > x_2$
   C: $(x_1 = x_2, y_1 > y_2) \vee (y_1 = y_2, x_1 > x_2)$
   D: $x_1 > x_2, y_1 > y_2$
   E: A operação é impossivel em $\mathbb{C}$.

   Resolução : Não existe uma definição padrão da operação $z_1 > z_2$ no conjunto dos números complexos. A resposta mais próxima desta é **E**.

5. Qual é o quinquagésimo termo da sucessão numérica $1, 4, 7, 10, \ldots$?

   A: 157 B: 151 C: 150 D: 149 E: 148

   Resolução : Temos: $a_{n+1} - a_n = 3,\ n = 1, 2, \ldots$ Ou seja, a_n é uma progressão aritmética de razão 3. Temos: $a_1 = 1,\ d = 3 \Longrightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 3(n-1) = 3n - 2,\ n \in \mathbb{N}$. O quinquagésimo termo é: $a_{50} = 3 \cdot 50 - 2 = 148$. A resposta certa é **E**.

6. A soma se todos os números da sucessão numérica $3; 1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \ldots$ é:

   A: 4 B: 4,5 C: 4,75 D: 5 E: ∞

   Resolução : Temos:

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3},\ n = 1, 2, \ldots$$

Ou seja, a_n é uma progressão geométrica de razão 1/3. Temos:

$$a_3 = 1,\ q = 1/3 \Longrightarrow s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{3(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}(1-\frac{1}{3^n}),\ n \in \mathbb{N}.$$

A soma de todos os termos é o limite de s_n quando $n \to \infty$ é:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{2}(1-\frac{1}{3^n}) = \frac{9}{2} = 4,5.$$

A resposta certa é **B**.

7. Da cidade A para cidade B há m diferentes caminhos. Da cidade B para cidade C há n diferentes caminhos. Que número de variantes Q existem para viajar pelo itinerário A-B-C? Qual é a probabilidade P que um viajante vai escolher uma destas variantes?

A: $Q = m+n,\ P = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$
B: $Q = m \cdot n,\ P = \frac{1}{m \cdot n}$
C: $Q = 0,5(m \cdot n),\ P = 0,5(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})$
D: $Q = 2(m+n),\ P = \frac{2}{m} + \frac{2}{n}$
E: $Q = 2m \cdot n,\ P = \frac{2m \cdot n}{m+n}$

Resolução : Seja $C_1 = \{c_{1j}\},\ j = 1,\ldots,m$, o conjunto de caminhos de A para B e $C_2 = \{c_{2k}\}$, $k = 1,\ldots,n$, o conjunto de caminhos de B para C. Assim, um trajecto A-B-C é um par ordenado (c_{1j}, c_{2k}), para algum $1 \le j \le m$ e algum $1 \le k \le n$. O conjunto de todos os trajectos A-B-C é o produto cartesiano $C_1 \times C_2$ e o número de elementos deste conjunto é

$$Q = \#(C_1 \times C_2) = \#(C_1) \cdot \#(C_2) = m \cdot n.$$

A probabilidade de selecionar-se um caminho (por exemplo (c_{13}, c_{22})) é

$$P = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{1}{m \cdot n}.$$

A resposta certa é **B**.

- As outras alternativas não estão certas, pois, por exemplo se $m = n = 1$ temos uma única possibilidade de percorrer A-B-C. Contudo em A, $Q = 2$, em C, $Q = 0,5$ (deveria ser número inteiro), em D $Q = 4$ em E $Q = 2$.

8. O domínio da definição *Dom* da função $f(x) = \sqrt{x-1}\ln(1-x^2)$ é:

A: $Dom = \emptyset$ B: $Dom =]-1,1[$ C: $Dom = [1,\infty[$ D: $Dom = \{1\}$ E: $Dom = \mathbb{R}$

Resolução : Temos:

$$\begin{gathered} x-1 \ge 0 \wedge 1-x^2 > 0 \\ x \ge 1 \wedge x^2-1 < 0 \Leftrightarrow (x \ge 1 \wedge (x-1)(x+1) < 0) \\ \Leftrightarrow x \ge 1 \wedge \{(x-1 > 0 \wedge x+1 < 0) \text{ ou } (x-1 < 0 \wedge x+1 > 0)\} \\ \Leftrightarrow x \ge 1 \wedge \{(x > 1 \wedge x < -1) \text{ ou } (x < 1 \wedge x > -1)\} \\ \Leftrightarrow x \in [1,\infty[\wedge \{x \in \emptyset \text{ ou } x \in]-1,1[\} \end{gathered}$$

que é impossível, ou seja $x \in \emptyset$. A resposta certa é **A.**

- As outras alternativas não estão certas, pois, por exemplo, em B, para $x = 0$, $f(0) = \sqrt{-1}\ln(1-0)$ e $\sqrt{-1}$ não existe em $\mathbb{R}$, em C, para $x = 2$, $f(2) = \sqrt{2-1}\ln(1-4)$ e $\ln(-3)$ não existe em $\mathbb{R}$, em D $x = 1$, $f(1) = \sqrt{1-1}\ln(1-1)$ e $\ln 0$ não existe em $\mathbb{R}$.

9. Usando a álgebra de proposições formalize e negue a frase "João joga xadrez e não pratica futebol, e não pratica natação". O resultado da negação desta frase é a frase seguinte:

   A. João não joga xadrez ou pratica futebol ou pratica natação.
   B. João não joga xadrez e pratica futebol e pratica natação.
   C. João não joga xadrez e pratica futebol e não pratica natação.
   D. João não joga xadrez e pratica futebol ou não pratica natação.
   E. João joga xadrez e pratica futebol e pratica natação.

   Resolução: Sejam p : "João joga xadrez ", q : "João pratica futebol" e r " João pratica natação ". As letras p, q e r representam duas proposições. A proposição composta, "João joga xadrez e não pratica futebol, e não pratica natação". é dada por $p \wedge \neg q \wedge \neg r$. A negação desta proposição é $\neg(p \wedge \neg \wedge q \neg r)$. Usando as leis de Morgan, teremos:

   $$\neg(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \Leftrightarrow \neg p \vee q \vee r.$$

   Colocando em linguagem corrente, teremos: "João não joga xadrez ou pratica futebol ou pratica natação". A resposta certa é **A**.

10. O valor do $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + \sin x)^{P(x)}$, onde $P(x) = \frac{2}{x}$, é igual a:

    A: 2 B: 0 C: e^2 D: e E: ∞

    Resolução : Temos $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + \sin x)^{P(x)} = 1^{\infty}$ que é uma indeterminação. Usando o limite notável

    $$\lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

    teremos:

    $$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} (1 + \sin x)^{\frac{2}{x}} &= \lim_{x \to 0^+} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin(x)} \cdot \frac{2\sin(x)}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \left((1 + \sin(x))^{\frac{1}{\sin(x)}} \right)^{\frac{2 \sin x}{x}} \\ &= e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2\sin(x)}{x}} = e^2. \end{aligned}$$

    A resposta certa é **C**.

11. A solução da inequação $y_1 \geq y_2$ sendo y_1 função não negativa definida sob a forma implícita satisfazendo a expressão $x^2 + y_1^2 - 4 = 0$, $y_2(x) = x$, é o intervalo de variação da variável x seguinte:

    A: $[-\infty, \infty]$ B: $[0, \infty]$ C: $[-2, 2]$ D: $[-2, \sqrt{2}]$ E: $\emptyset$

    Resolução: Temos $x^2 + y_1^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow y_1^2 = 4 - x^2$, que implica $y_1 = \sqrt{4 - x^2}$, pois, $y_1 \geq 0$. Tendo em conta as condições de existência de raíz quadrada, temos $y_1 \geq y_2$ se $4 - x^2 \geq 0$ e $\sqrt{4 - x^2} \geq x$. Visto $\sqrt{4 - x^2}$ é sempre positiva no seu domínio, então, se $x < 0$, $y_1 \geq y_2$. Assim, resta analizar quando $x \geq 0$.

    $$\begin{cases} \sqrt{4 - x^2} \geq x \text{ se } x \geq 0 \\ 4 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x^2 \geq x^2 \\ x^2 - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2x^2 \geq 0 \text{ se } x \geq 0 \\ x^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$$

    $$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4 \leq 0 \text{ se } x \geq 0 \\ (x-2)(x+2) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \leq 0 \text{ se } x \geq 0 \\ (x-2)(x+2) \leq 0 \end{cases}$$

    $$\Leftrightarrow \begin{cases} ((x - \sqrt{2} \geq 0 \wedge x + \sqrt{2} \leq 0) \text{ ou } (x - \sqrt{2} \leq 0 \wedge x + 2 \geq 0)) \text{ se } x \geq 0 \\ (x - 2 \geq 0 \wedge x + 2 \leq 0) \text{ ou } (x - 2 \leq 0 \wedge x + 2 \geq 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ((x \geq \sqrt{2} \wedge x \leq -\sqrt{2}) \text{ ou } (x \leq \sqrt{2} \wedge x \geq -\sqrt{2})) \text{ se } x \geq 0 \\ (x \geq 2 \wedge x \leq -2) \text{ ou } (x \leq 2 \wedge x \geq -2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x \in \emptyset \text{ ou } x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]) \text{ se } x \geq 0 \\ (x \in \emptyset) \text{ ou } (x \in [-2, 2]) \end{cases} \Longrightarrow x \in [0, \sqrt{2}].$$

Tendo em conta que o domínio de $\sqrt{4-x^2}$ é $[-2; 2]$ e que $\sqrt{4-x^2} \geq x$ quando $x < 0$, então, intersectando estas condições, temos $\sqrt{4-x^2} \geq x$ quando $x \in [-2, 0[$. Assim, juntando com o caso $x \geq 0$, temos:

$$\sqrt{4-x^2} \geq x \text{ se e somente se } x \in [-2, \sqrt{2}].$$

A resposta certa é **D**.

- Pode-se resolver graficamente, esboçando os gráficos de y_1, y_2 e resolver $y_1 \geq y_2$.

12. A lei de desintegração da massa m do Rádio em função do tempo é $m = m_0 e^{-kt}$, onde m_0 é a massa inicial, k $(k > 0)$ é o coeficiente de proporcionalidade, t é o tempo em anos. Qual o período T de desintegração do rádio, isto é o período de tempo t, durante o qual se desintegra metade da massa inicial do Rádio?

A: $T = \frac{k}{\ln 2}$ B: $T = k\ln 2$ C: $T = \frac{\ln 2}{T}$ D: $T = -\frac{\ln 2}{k}$ E: $T = 2\ln k$

Resolução : Vamos procurar t que corresponde a $m = \frac{m_0}{2}$. Temos:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kt} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-kt} \Leftrightarrow 2 = e^{kt} \Leftrightarrow \ln 2 = \ln e^{kt} \Leftrightarrow \ln 2 = kt \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{k}.$$

Desta forma, $T = \frac{\ln 2}{k}$. A resposta certa é **C**.

13. Quais são o período T e o contradomínio C_f da função $y = (\sin x - \cos x)^2$?

A: $T = 2\pi$, $C_f = [-1, 0]$ B: $T = \pi$, $C_f = [-1, 1]$ C: $T = 2\pi$, $C_f = [0, 1]$
D: $T = \pi$, $C_f = [0, 2]$ E: $T = \pi$, $C_f = [-2, 0]$

Resolução : Temos:

$$y = (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 - \sin(2x).$$

Assim, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x+T) = f(x) &\Rightarrow 1 - \sin(2(x+T)) = 1 - \sin(2x) \\ &\Rightarrow \sin(2x + 2T) = \sin(2x). \end{aligned}$$

Visto que a função $\sin(\cdot)$ tem período 2π, teremos $2T = 2\pi$. Desta forma, a função $y = 1 - \sin(2x)$ tem período $T = \pi$.

Para determinarmos o contradomínio, tomamos em consideração que $-1 \leq \sin(2x) \leq 1$. Assim, adicionando 1 em ambos os membros, obtemos:

$$0 \leq 1 - \sin(2x) \leq 2, \ \forall x.$$

Desta forma, o contradomínio é $C_f = [0, 2]$. A resposta certa é **D**.

- As alternativas A, B e E não estão certas, pois, entre outros motivos, o contradomínio de y contém apenas números não negativos (o quadrado de um número real é sempre não negativo). A alternativa C não está certa, pois, por exemplo, para $x = -\pi/4$, $y = 2$ mas este valor não consta do contradomínio.

14. Em que domínio D_f de variação do argumento x a função $f(x) = x^2$ admite a sua inversa $f^{-1}(x)$ tal que os gráficos destas funções intersectam-se em dois pontos?

A: $D_f : x \in]-\infty, 0]$ B: $D_f : x \in \mathbb{R}$ C: $D_f : x \in [0, \infty[$
D: $D_f : x \in]-1, 0]$ E: $\emptyset$

Resolução : A função $f(x) = x^2$ é injectiva nos domínios $]-\infty, 0]$ e $[0, \infty[$. Portanto, $f(x) = x^2$ é inversível nestes intervalos. As inversas são, $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ e $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, respectivamente. Intersectando cada uma das inversas com $f(x) = x^2$, temos:

$$x^2 = -\sqrt{x},\ x \geq 0 \Rightarrow x = 0$$
$$x^2 = \sqrt{x},\ x \geq 0 \Rightarrow x^4 = x^2,\ x \geq 0 \Rightarrow x^2(x^2-1) = 0,\ x \geq 0$$
$$x = 0 \vee x = 1.$$

Assim, o domínio D_f de variação do argumento x a função $f(x) = x^2$ admite a sua inversa $f^{-1}(x)$ tal que os gráficos destas funções intersectam-se em dois pontos é $x \in [0, \infty[$. A resposta certa é **C**.

- As alternativas A e D não estão certas, pois, a inversa de $f(x)$ nestes conjuntos toma valores negativos, dai que intersecta $f(x) = x^2$ num único ponto $(x = 0)$. A alternativa B não está certa, pois, a função $f(x)$ não é inversível em $\mathbb{R}$, pois, ela não é injectiva.

15. Calcule $\lim\limits_{x\to A} \log_2^{\frac{\sin(x^2)}{x^2}}$, sendo $A = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

A: $\frac{\pi}{2}$ B: $\frac{2}{\pi}$ C: $1 - \log_2^{\pi}$ D: $1 + \log_2^{\pi}$ E: 0

Resolução : Temos:

$$\lim_{x\to A} \log_2^{\frac{\sin(x^2)}{x^2}} = \log_2^{\frac{\sin(A^2)}{A^2}} = \log_2^{\frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2}} = \log_2^{\frac{2}{\pi}} = \log_2^2 - \log_2^{\pi} = 1 - \log_2^{\pi}.$$

A resposta certa é **C**.

- Note que o limite quando existe é único.

16. Qual é o valor da função $A = f(2)$ para que seja contínua a função $f(x)$ definida de modo seguinte:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, \text{ quando } x \neq 2 \\ A, \text{ quando } x = 2. \end{cases}$$

A: 4 B: 0 C: 2 D: -2 E: $\emptyset$

Resolução : A condição de condinuidade no ponto x_0 é:

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

Analizemos esta condição nos pontos que suscitam dúvida. Para $x = 2$, temos

$$f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x)$$
$$A = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} (x+2) = 4.$$

A resposta certa é **A**.

17. Em que intervalo fica(m) o(s) zero(s) da função $f(z) = 2^T - z - 6$, sendo $T = 2\log_2^z$?

A: $[0,3[$ B: $[1,4]$ C: $]-2,0]$ D: $[-2,3[$ E: $\emptyset$

Resolução : Tendo em conta o domínio da função $\log_2^z$, $z > 0$, temos:

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow 2^{2\log_2^z} - z - 6 = 0 \Leftrightarrow 2^{\log_2^{z^2}} - z - 6 = 0 \;\Leftrightarrow z^2 - z - 6 = 0 \Leftrightarrow (z-3)(z+2) = 0$$
$$\Rightarrow z - 3 = 0 \vee z + 2 = 0 \Rightarrow z = 3 \vee z = -2.$$

Tendo em conta que $z > 0$, $f(z) = 0$ se e somente se $z = 3$. A resposta certa é **B**.

18. Para que valores do parâmetro λ a equação $4^x - 2^{x+1} + \lambda = 0$ tem raizes reais?

A: $\lambda \in [2,3[$ B: $\lambda \in]1,\infty[$ C: $\lambda = 2$ D: $\lambda \in]-\infty,1]$ E: $\lambda \in [4,\infty[$

Resolução : Temos:

$$4^x - 2^{x+1} + \lambda = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2^x \cdot 2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + \lambda = 0.$$

Fazendo $t = 2^x$, teremos $t^2 - 2t + \lambda = 0$ que tem raizes reais quando $4 - 4\lambda \geq 0$. Assim,

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\lambda}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - \lambda}.$$

Dest forma, $2^x = t$ tem soluções reais se $t > 0$, ou seja, $1 \pm \sqrt{1-\lambda} > 0$ e $1 - \lambda \geq 0$. Temos:

$$(1 + \sqrt{1-\lambda} > 0 \wedge 1 - \lambda \geq 0) \text{ ou } (1 - \sqrt{1-\lambda} > 0 \wedge 1 - \lambda \geq 0)$$
$$(1 + \sqrt{1-\lambda} > 0 \wedge -\lambda \geq -1)\text{ou}(-\sqrt{1-\lambda} > -1 \wedge -\lambda \geq -1)$$
$$(1 + \sqrt{1-\lambda} > 0 \wedge \lambda \leq 1) \text{ ou } (\sqrt{1-\lambda} < 1 \wedge \lambda \leq 1)$$
$$(\lambda \leq 1) \text{ ou } (1 - \lambda < 1 \wedge \lambda \leq 1)$$
$$\lambda \leq 1 \text{ ou } (\lambda > 0 \wedge \lambda \leq 1)$$
$$\Longrightarrow \lambda \leq 1.$$

A resposta certa é **D**.

- Note que as outras alternativas leva a raizas não reiais.

19. Resolvendo a equação $\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}) = 1$ a resposta, sendo $k \in \mathbb{Z}$ é:

A: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ B: $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ C: $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$
D: $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ E: $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Resolução : Temos:

$$\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi \;\Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{12} + k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

A resposta certa é **E**.

- Note que as outras alternativas não satsfazem a equação .

20. A solução da inequação $|x| - x \leq 2$ é:

A: $x \in [-1,\infty[$ B: $x \in [-6,-4[$ C: $x \in [-4,-2[$
D: $x \in]-\infty,-1[$ E: $\emptyset$

Resolução : Usando a definição de módulo e sintectizando numa tabela, teremos:

x	$]-\infty,0[$	$[0,\infty[$
$\lvert x\rvert$	$-x$	x
$-x$	$-x$	$-x$
Soma	$-2x$	0

Assim,

$$|x|-x\leq 2\Leftrightarrow\{(-2x\leq 2,\ \ \text{se } x<0) \text{ ou } (0\leq 2,\ \ \text{se } x\geq 0)\}$$
$$|x|-x\leq 2\Leftrightarrow\{(x\geq -1,\ \ \text{se } x<0) \text{ ou } (x\geq 0)\}$$
$$|x|-x\leq 2\Leftrightarrow\{-1\leq x<0 \text{ ou } x\geq 0\}$$

A resposta certa é **A**.

- As outras alternativas não estão certas, pois, ou incluem valores que não satisfazem a inequação ou excluem valores que atisfazem a inequação. Por exemplo, em B, tomando $x=-5$ e substituirmos na inequação, obtemos $10\leq 2$.

21. Resolvendo a inequação $\sqrt{2-x}<\sqrt{x-4}$ a resposta é:

A: $x\in]2,4[$ B: $x\in[2,4]$ C: $x\in[3,\infty]$ D: $x\in[0,4]$ E: $\emptyset$

Resolução : Usando domínio de existência de raiz quadrada, temos:

$$2-x\geq 0\wedge x-4\geq 0\wedge\sqrt{2-x}<\sqrt{x-4}$$
$$\Leftrightarrow -x\geq -2\wedge x\geq 4\wedge 2-x<x-4\ \Rightarrow x\leq 2\wedge x\geq 4\wedge -2x<-6$$
$$\Rightarrow x\leq 2\wedge x\geq 4\wedge x>3\ \Leftrightarrow x\in\emptyset.$$

A resposta certa é **E**.

- As outras alternativas não estão certas, pois, ou não satisfazem a inequação. Por exemplo, em B, tomando $x=2$ e substituirmos na inequação, obtemos $0<\sqrt{-2}$ que não tem sentdo em $\mathbb{R}$.

22. Sejam os gráficos das funções $f_1(t)=\log_{\frac{1}{2}}^t$ e $f_1(t)=\log_2^t$. Para que valores de argumento t será $f_1(t)\geq f_2(t)$?

A: $t\in]0,\infty[$ B: $t\in]1,\infty[$ C: $t\in]-\infty,1[$ D: $t\in]0,1]$ E: $\emptyset$

Resolução : Temos:

$$f_1(t)\geq f_2(t)\Leftrightarrow\log_{\frac{1}{2}}^t\geq\log_2^t\Longrightarrow\frac{\log_2^t}{\log_2^{\frac{1}{2}}}\geq\log_2^t\Rightarrow -\log_2^t\geq\log_2^t,\ t>0\ \Rightarrow -2\log_2^t\geq 0\Rightarrow\log_2^t\leq 0$$
$$\log_2^t\leq\log_2^1,\ t>0\Rightarrow t\leq 1\wedge t>0\ \Rightarrow 0<t\leq 1.$$

A resposta certa é **D**.

23. Para que o produto da matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ por vector $\begin{pmatrix}x\\ y+1\end{pmatrix}$ seja igual ao vector $\begin{pmatrix}y\\ 2\end{pmatrix}$ os números x e y devem ser iguais aos valores?

A: 4 e 0 B: 1 e 0 C: 0 e 4 D: 2 e 2 E: 3 e 1

Resolução : Temos:

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\ 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-x+y+1\\ 2y+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+y+1=y \\ 2y+2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0. \end{cases}$$

A resposta certa é **B**.

24. Considere o sistema linear $\begin{cases} \beta x+2y=\beta+4 \\ 2x+\beta y=-2. \end{cases}$ Segundo o parâmetro β a afirmação é verdadeira:

A: se $\beta=2$ o sistema tem uma e única solução
B: se $\beta=-2$ o sistema tem mais do que uma solução
C: se $\beta\neq 2$ e $\beta\neq -2$ o sistema tem mais do que uma solução
D: se $\beta=-2$ o sistema não tem solução
E: Nenhuma das alternativas anteriores.

Resolução : Aplicando o método de Cramer, temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta & 2 \\ 2 & \beta \end{vmatrix} = \beta^2-4.$$

Se $\Delta\neq 0$, ou seja, $\beta\neq -2$ e $\beta\neq 2$, o sistema tem uma e única solução .

- se $\beta=2$, obtemos

$$\begin{cases} 2x+2y=6 \\ 2x+2y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2y=-6 \\ 2x+2y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=-8 \\ 2x+2y=-2 \end{cases}$$

o que é impossível, ou seja, o sistema não tem solução.

- se $\beta=-2$, obtemos

$$\begin{cases} -2x+2y=2 \\ 2x-2y=-2 \end{cases} \Rightarrow \{\ 2x-2y=-2$$

o que significa que o sistema tem mais do que uma solução. A resposta certa é **B**.

25. A solução da inequação $\frac{(x+2)(x-1)}{x-3}\geq 0$ é o intervalo:

A: $\emptyset$ B: $]-\infty,-2]$ C: $[1,3[$ D: $[-2,1]\cup[3,\infty[$ E: $]-\infty,-2[\cup[1,3[$

Resolução : Temos:

x	$]-\infty,-2[$	-2	$]-2,1[$	1	$]1,3[$	3	$]3,\infty[$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Produto	$-$	0	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

Assim, $\frac{(x+2)(x-1)}{x-3}\geq 0 \Leftrightarrow [-2;1]\cup]3,\infty[$. A resposta certa é **D**.

- As outras alternativas não estão certas, pois, ou não incluem todos valores do conjunto solução ou incluem valores que não fazem parte da solução. Por exemplo, em C, tomando $x=2$ e substituirmos na inequação, obtemos $-4\geq 0$.

26. As assintotas verticais A_V, horizontais A_H, oblíqua A_O da função $f(x)=e^T$, $T=\frac{1}{x}$ são:

A: $A_V: x=1, A_H: y=e, A_O: y=x+1$
B: $A_V: x=0, A_H: y=1, A_O:$ não existe

C: $A_V : x = 0, A_H : y = 0, A_O :$ não existe
D: $A_V : x = 1, A_H : y = 1, A_O : y = x$
E: A função não tem assímptotas.

Resolução : Temos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

logo, a recta $y = 0$ é assímptota horizontal. Assímptota oblíqua é a recta $= mx + b$, onde

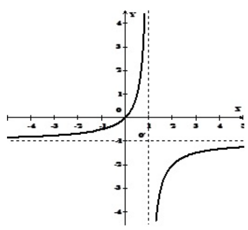
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Assim, não existe assímptota oblíqua. Mais, $x = 0$ não pertenção domínio de $f(x)$ e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

A resposta certa é **C**.

27. A curva, cujo gráfico está apresentado na figura, tem a equação:



A: $y = \frac{2-x}{x-1}$ B: $y = \frac{-x}{x+1}$ C: $y = \frac{x+2}{x+1}$ D: $y = \frac{x}{1-x}$ E: $y = \frac{2-x}{1-x}$

Resolução : O gráfico é uma função do tipo, $y = f(x) = \frac{Ax+B}{Cx+D}$, $C \neq 0$. Do gráfico, vemos que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -1$. Então, $\frac{A}{C} = -1$. De outro lado, do gráfico $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, então, a recta $x = 1$ é assímptota vertical. Assim, $-\frac{D}{C} = 1$. Logo,

$$y = f(x) = \frac{Ax+B}{Cx+D} = \frac{-Cx+B}{Cx-C} = \frac{-x+\frac{B}{C}}{x-1}$$

Do gráfico, vemos que o zero da função é zero, então $\frac{B}{C} = 0$. A única expressão que satisfaz as condições descritas é $y = -\frac{x}{x-1}$, ou seja, a alternativa **D**.

- As outras alternativas estão erradas pois, ou pelo menos uma das assímptotas ou o zero da função não corresponde às do gráfico apresentado .

28. As rectas no plano cartesiano $y = \frac{1}{2}x + 5$ e $y = kx - b$ são perpendiculares quando:

A: $k = 2,\ b = 5$ B: $k = 2,\ b = -5$ C: $k = -2,\ b \in \mathbb{R}$
D: $k = 1,\ b \in \mathbb{R}$ E: $k = -0,5,\ b \in \mathbb{R}$

Resolução : Os declives das rectas são $a_1 = \frac{1}{2}$ e $a_2 = k$, respectivamente. Usando a condição de perpendicularidade de rectas no plano, teremos:

$$a_1 \cdot a_2 = -1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k = -1 \Rightarrow k = -2.$$

A resposta certa é **D**.

- As outras alternativas estão erradas pois, esboçando os gráficos não teremos rectas perpendiulares.

29. As abcissas dos pontos da inflexão do gráfico da função $f(x) = x^4\left(\frac{x}{20} - \frac{1}{6}\right)$ são:

A: $x = 0$ B: $x = 2$ C: $x = 1,\ x = \frac{10}{3}$ D: $x = 0$ e $x = \frac{10}{3}$ E: Não existem

Resolução : Temos:

$$f(x) = f(x) = x^4\left(\frac{x}{20} - \frac{1}{6}\right) = f(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{6} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}$$
$$\Rightarrow f''(x) = x^3 - 2x^2 \Rightarrow f''(x) = 0 \ \Rightarrow x^3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2.$$

Verifiquemos as condições suficientes para que $x = 0,\ x = 2$ sejam pontos de inflexão. Temos:

$$f'''(x) = 3x^2 - 2x \Rightarrow f'''(0) = 0 \ \Rightarrow f'''(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 \Rightarrow f'''(2) = 8.$$

Desta forma, o ponto de inflexão é $x = 2$. A resposta certa é **B**.

30. Simplificando a expressão $\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ obtém-se:

A: 1 B: $\tan\alpha$ C: -1 D: $\sin(2\alpha)$ E: $\cos(2\alpha)$

Resolução : Temos:

$$\frac{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{\cos(2\alpha)}{1} = \cos(2\alpha).$$

A resposta certa é **E**.

31. Os estremos (máximo ou/e mínimo) locais da função $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ são:

A: $f_{\text{máx.}} = 1,\ f_{\text{min.}} = 0$ B: $f_{\text{min.}} = -1$ C: $f_{\text{máx.}} = 2, f_{\text{min.}} = 1$
D: $f_{\text{máx.}} = 1$ E: Não há extremos

Resolução : Determinemos os pontos críticos. Temos:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 - 12x^2 = 0$$
$$\Rightarrow 12x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1.$$

Estudando o sinal da derivada, teremos:

x	$]-\infty, 0[$	0	$]0,1[$	1	$]1,\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

Desta forma, $f_{\text{min}} = -1$. A resposta certa é **B**.

32. As rectas tangentes ao gráfico da curva definida pela equação $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$ nos pontos de intersecção deste gráfico com os eixos coordenados caracterizam-se como:

A. Intersectadas uma com outra na origem do sistema de coordenadas.
B. Perpendiculares uma em relação a outra.
C. Paralelas e horizontais.
D: Paralelas e verticais.
E. Paralelas.

Resolução : Os pontos de intersecção do gráfico de $f(x)$ com os eixos coordenada são os que tem ordenada $y=0$ e abcissa $x=0$, respectivamenete. Temos A$(4,0)$ e $B(0,2)$. A recta tangente que passa pelo ponto (x_0,y_0) ao gráfico de $f(x)$ tem a forma $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. Para o ponto $A(4,0)$, temos:

$$f(x)=\frac{x-4}{x-2}=\frac{x-2-2}{x-2}=\frac{x-2}{x-2}+\frac{-2}{x-2}=1-\frac{2}{x-2}$$
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{(x-2)^2}\Rightarrow f'(4)=\frac{1}{2}\ \Rightarrow y-0=\frac{1}{2}(x-4)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x-2.$$

Para o ponto $B(0,2)$, temos:

$$f'(x)=\frac{2}{(x-2)^2}\Rightarrow f'(0)=\frac{1}{2}\ \Rightarrow y-2=\frac{1}{2}x\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+2.$$

Visto que o declive destas rectas é igual, as rectas são paralelas e ambas são oblíquas. A resposta certa é **E**.

33. Um ponto material move-se pelo eixo recto segundo a lei $R(t)=-\frac{t^3}{6}+3t^2-5$ ($t-$ segundos, $R-$metros). A velocidade de movimento $v(t)$ em (m/s) e o instante de tempo T em (s) quando aceleração de movimento é nula são:

A: $v(6)=18,\ T=6$ B: $v(5)=16,\ T=5$ C: $v(4)=12,\ T=4$
D: $v(3)=9,\ T=3$ E: $v(1)=3,\ T=1$

Resolução : Temos:

$$v(t)=R'(t)=-\frac{t^2}{2}+6t,\ a(t)=v'(t)=R''(t)=-t+6,\ a(t)=0$$
$$\Rightarrow -t+6=0\Rightarrow t=6s,\ v(6)=R'(6)=-\frac{6^2}{2}+6\cdot 6=18.$$

A resposta certa é **A**.

34. Um ponto material é deslocado do ponto inicial $A(2,1)$ de um sistema de coordenadas cartesianas segundo o vector $\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ numa distância igual à $4|\vec{a}|$. Então o ponto da sua nova posição é:

A: $(4,2\sqrt{3}+1)$ B: $(2,2\sqrt{3})$ C: $(6,4)$ D: $(4,2)$ E: $(-4,2)$

Resolução : Seja $P(x,y)$ a nova posição do ponto material. Assim, o vector $\vec{AP}=(x-2,y-1)$ é paralelo ao vector $\vec{a}$. Temos:

$$\vec{AP}=k\vec{a}\Rightarrow (x-2,y-1)=k(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})\Rightarrow x-2=\frac{k}{2}\Rightarrow y-1=\frac{k\sqrt{3}}{2}.$$

Assim,

$$|\vec{AP}|=4|\vec{a}|\Rightarrow \sqrt{k^2(\frac{1}{4}+\frac{3}{4})}=4\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\Rightarrow |k|=4.$$

Tomamos $k=4$ pois P situa-se mais à direita de A segundo a direcção e sentido do vector $\vec{a}$. Assim,

$$x=2+\frac{k}{2}=4,\ y=1+\frac{k\sqrt{3}}{2}=1+2\sqrt{3}.$$

Desta forma, a nova posição do ponto material é $P(4,1+2\sqrt{3})$. A resposta certa é **A**.

35. O limite da expressão $\frac{\tan(-3x)}{\sin(5x)}$ quando $x \to 0$ é o valor (ou não existe):

A: 0 B: $0,6$ C: -1 D: $-0,6$ E: Não existe

Resolução : Temos:

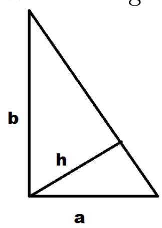
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(-3x)}{\sin(5x)} = \frac{0}{0} \text{ indeterminação }.$$

Usando o limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, teremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\tan(-3x)}{\sin(5x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(-3x)}{\cos(-3x)\sin(5x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(-3x)5x\sin(-3x)}{(5x)(-3x)\cos(-3x)\sin(5x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(-3x)}{(-3x)\cos(-3x)(5x)}\cdot\frac{(-3x)5x}{\sin(5x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{5x\cos(-3x)}\cdot\frac{-3x}{1} = -\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(-3x)} = -0,6.
\end{aligned}$$

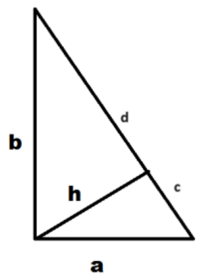
A resposta certa é **D**.

36. Qual é a medida da altura h no triângulo rectangular de catetos a e b, se $b = a\sqrt{3}$?



A: $a\sqrt{3}$ B: $\frac{a}{\sqrt{3}}$ C: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D: $\frac{3a^2}{2}$ E: $\frac{a^2}{3}$

Resolução : Consideremos os catetos c e d, como mostra a figura



Assim, usando teorema de Pitágoras para os três triângulos rectângulos, temos:

$$\left\{\begin{array}{c} (d+c)^2 = a^2 + b^2 \\ a^2 = h^2 + c^2 \\ b^2 = h^2 + d^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} (d+c)^2 = a^2 + 3a^2 \\ a^2 - b^2 = c^2 - d^2 \\ a^2 = h^2 + c^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} d + c = 2a \\ a^2 - 3a^2 = (2a-d)^2 - d^2 \\ a^2 = h^2 + c^2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} c = 2a - d \\ -2a^2 = 4a^2 - 4ad \\ a^2 = h^2 + c^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} c = 2a - d = \frac{a}{2} \\ d = \frac{3a}{2} \\ a^2 = h^2 + c^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} c = \frac{a}{2} \\ d = \frac{3a}{2} \\ h = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{\sqrt{3}a}{2}. \end{array}\right.$$

A resposta certa é **C**.

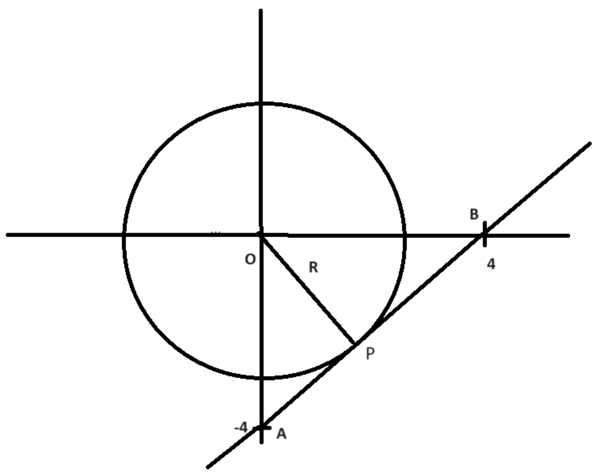
37. Seja a recta $y = x - 4$ tangente a uma circunferência centrada na origem de um sistema de coordenadas cartesianas. Então a sua equação $\rho = \rho(\theta)$ num sistema polar conjugado ao sistema cartesiano dado (isto é quando $x = \rho\cos(\theta),\ y = \rho\sin(\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$) será:

A: $\rho = 2\sqrt{2}$ B: $\rho = 2\pi\sqrt{2}$ C: $\rho = \pi\sqrt{2}$ D: $\rho = 2\pi$ E: $\rho = \pi^2$

Resolução : A equação a circunfência é $x^2 + y^2 = R^2$, onde $R > 0$ é o raio. Assim, em coordenadas polares, teremos:

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow (\rho\cos\theta)^2 + (\rho\cos\theta)^2 = \rho^2$$
$$\Rightarrow \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin\theta^2 = R^2 \Rightarrow \rho^2 = R^2 \Rightarrow \rho = R.$$

Vamos determinar R. Esboçando a figura, vemos o possível caso em que a recta $y = x - 4$ seja tangente à uma circunferência comcntro na origem.



Determinemos as coordenadas do ponto de tangência. Tendo em conta o gráfico, temos:

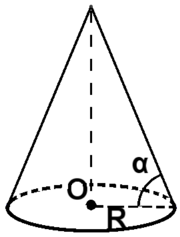
$$x^2 + y^2 = R^2,\ R > 0,\ y < 0,\ y = -\sqrt{R^2 - x^2},\ y' = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 1.$$
$$\Rightarrow x^2 = R^2 - x^2 \Rightarrow x = \frac{R}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = -\frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Assim, o ponto de tangência é $P(\frac{R}{\sqrt{2}}, -\frac{R}{\sqrt{2}})$. O segmento OP pertence à recta $y = -x$, logo, divide o triângulo isósceles AOB em dois triângulos iguais e rectângulos. Visto o triângulo AOB é rectângulo e isósceles, o ângulo $PAO = 45°$. Logo,

$$\sin(\angle PAO) = \frac{|OP|}{|OA|} \Rightarrow \sin(45°) = \frac{R}{4} \Rightarrow R = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Assim, a equação da circunferência em coordenadas polares é $\rho = 2\sqrt{2}$. A resposta certa é **A.**

39. Seja o raio de base dum cone circular é igual a R, a geratriz faz um ângulo $\alpha = 60°$ com a base. Seja o ângulo α diminuido por $15°$. Em quantas vezes diminuirá o volume V do cone.



A: $6\sqrt{3}$ vezes B: $4\sqrt{3}$ vezes C: $2\sqrt{3}$ vezes D: $\sqrt{3}$ vezes E: $0,5\sqrt{3}$ vezes

Resolução : O volume do cone é $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, h altura. Quando α diminui 15°, $\alpha = 45^\circ$, teremos $\frac{h_f}{R} = \tan(45^\circ)$ ou seja $h_f = R$. Assim, quando $\alpha = 60^\circ$, teremos $h_0 = R\tan(60^\circ)$. Desta forma,

$$\frac{V_f}{V_0} = \frac{1/3\pi R^2 \cdot R\tan(45^\circ)}{1/3\pi R^2 \cdot R\tan(60^\circ)} = \frac{1}{\tan(60^\circ)} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Assim $V_f = \frac{1}{\sqrt{3}}V_0$. Logo, V_0 diminui $\sqrt{3}$ vezes. A resposta certa é **D**.

40 A primitiva $F(x)$ da função $f(x) = \sin(3x)$, sendo c uma constante arbitrária é:

A: $F(x) = -\cos(3x) + c$
B: $F(x) = \frac{1}{3}\cos(3x) + c$
C: $F(x) = 3\cos(3x) + c$
D: $F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x) + c$
E: $F(x) = 3\cos(3x) + c$

Rsolução : Temos:

$$F(x) = \int f'(x)dx = \int \sin(3x)dx = -\frac{1}{3}\cos(3x) + c,$$

onde c é uma constante arbitrária. A resposta é **D**.

Exame de Matemática III de 2021

Correcção do exame de Matemática III de 2021

1. Considere as funções $f(x) = |-2x|$ e $g(x) = -2x$? Em que conjunto tem-se $f(x) = g(x)$?

   A: $\mathbb{R}$ B: 0 C: $]-\infty, 0]$ D: $[0, \infty[$ E: $\emptyset$

   Resolução: Temos: $f(x) = |-2x| = -2x$ se $-2x \geq 0$, então $f(x) = g(x) = -2x$ se $x \leq 0$. A resposta certa é **C**.

   - As outras alternativas não estão certas, pois, ou excluem valores que pertencem ao conjunto solução ou incluem valores que não pertencem ao conjunto solução . Por exemplo, em A e D, se $x = 1$, temos $f(1) = 2 \neq g(1) = -2$.

2. Quais os zeros da função definida por $y = |x-4| - 3$?

   A: -4 e 4 B: 3 C: $\emptyset$ D: 1 e 7 E: 4

   Resolução : Temos:

$$y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -(x-4) - 3 = 0, & \text{se } x - 4 < 0 \\ x - 4 - 3 = 0, & \text{se } x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 1 = 0, & \text{se } x < 4 \\ x = 7, & \text{se } x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, & \text{se } x < 4 \\ x = 7, & \text{se } x \geq 4. \end{cases}$$

   A resposta certa é **D**.

   - As outras alternativas não estão certas pois substituindo na função não obtemos $y = 0$.

3. Multiplicando os valores inteiros de x que satisfazem as desigualdades $|x-2| \leq 3$ e $|3x-2| > 5$, obtemos:

   A: 12 B: 60 C: -12 D: -60 E: 0

   Resolução : Temos:

$$\begin{aligned}
|x-2| - 3 \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2 - 3 \leq 0, & \text{se } x - 2 \geq 0 \\ -(x-2) - 3 \leq 0, & \text{se } x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5, & \text{se } x \geq 2 \\ -x - 1 \leq 0, & \text{se } x < 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq 5, & \text{se } x \geq 2 \\ x \geq -1, & \text{se } x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5 \vee -1 \leq x < 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5. \\
|3x-2| - 5 > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x - 2 - 5 > 0, & \text{se } 3x - 2 \geq 0 \\ -(3x-2) - 5 > 0, & \text{se } 3x - 2 < 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x > 7, & \text{se } x \geq 2/3 \\ -3x - 3 > 0, & \text{se } x < 2/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 7/3, & \text{se } x \geq 2/3 \\ x < -1, & \text{se } x < 2/3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad x > 7/3 \vee x < -1.
\end{aligned}$$

   Intersectando os conjuntos das soluções de amas inequações obtemos $7/3 < x \leq 5$. Assim, as soluções inteiras são 3,4 e 5 cujo produto é 60. A resposta certa é **B**.

- Note que o produto não pode ser negativo, pois, significa que pelo menos uma das soluções inteiras é um número negativo. Vimos que $x = -1$ não é solução da inequação $|3x-2| > 5$ e se $x < -1$ não satisfaz a inequação $|x-2| \leq 3$.
- A alternativa A não está certa, pois, $x = 5$ é uma solução inteira e não é divisor de 12.
- A alternativa E não está certa, pois, $x = 0$ não satisfaz $|3x-2| > 5$.

4. Seja $1 < x < 3$ e $|x-1| + |x-3|$ será igual a:

   A: $2x+4$ B: 2 C: $-2x+4$ D: 4 E: $2x-2$.

   Resolução : Temos:

x	$]-\infty, 1[$	1	$]1,3[$	3	$]3,\infty[$
$\|x-1\|$	$-(x-1)$	0	$x-1$	2	$x-1$
$\|x-3\|$	$-(x-3)$	2	$-(x-3)$	0	$x-3$
$\|x-1\|+\|x-3\|$	$-x-1$	2	2	2	$2x-4$

   A resposta certa é **B**.

   - Note que substituindo $x = \frac{3}{2}$ e $x = 2$ em $|x-1|+|x-3|$ obtemos 2, contudo nas outras alternativas não encontramos o mesmo valor.

5. Qual o conjunto de soluções da inequação $|x^2 - 4x - 5| > 0$?

   A: $\{-1, 5\}$ B: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}$ C: $]-\infty, -1[\cup]5, \infty[$ D: $]-1, 5[$ E: $\mathbb{R}$

   Resolução : Tendo em conta a definição de módulo, $f(x) = |x^2 - 4x - 5| \geq 0$. Verificamos o caso $f(x) = 0$. Temos:

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 4 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 9$$
$$x - 2 = \pm 3 \Rightarrow x = 2 \pm 3 \Rightarrow x_1 = -1 \wedge x_2 = 5.$$

   Assim, $f(x) > 0$ em $\mathbb{R}$ com excepção dos pontos onde $f(x) = 0$, que são os pontos $x = -1$ e $x = 5$. A resposta certa é **B**.

   - As outras alternativas não estão certas, pois, ou excluem valores que pertencem ao conjunto solução ou incluem valores que não pertencem ao conjunto solução . Por exemplo, em A e E, se $x = -1$, não satisfaz a inequação e em C, D $x = 2$, $x = 6$ satisfazem a inequção mas não estão inclusos nestes conjuntos, respectivamente.

6. O Armando esqueceu-se do *pin* do seu telefone, mas sabe que se inicia com 0, que 7 faz parte do pin e que é composto por 4 algarismos sem repetição . De quantas tentativas precisaria o Armando para garantir que poderia desbloquear o telefone?

   A: 120 B: 56 C: 168 D: 504 E: 126

   Resolução : Temos as seguintes possibilidades $07xy$ ou $0x7y$ ou $0xy7$, onde xy são os dígitos em falta para completar o pin. Para cada um dos casos, temos $8 \cdot 7$ possibilidades de escolher os outros dois dígitos, pois, os dígitos não se repetem no pin do Armando. Esta corresponde a um arranjo de 8 elementos tomados 2 a dois, sem repetição. Para o número total das possibilidades, temos $3 \cdot 56 = 168$. A resposta certa é **C**.

7. Soube-se que numa reunião os participantes infringiram as regras de distanciamento social, terminado a reunião com um aperto de mão. Para rastreamento dos contactos, as autoridades de saúde perguntaram ao recepcionista qual o número de presentes na reunião. Este disse não saber, mas ter contado no total 15

apertos de mão, sendo que todos os participantes se despediram dos restantes. Quantas pessoas estavam na reunião?

A: 10 B: 6 C: 15 D: 4 E: 8

Resolução : Seja n o número de pessos presentes na reunião. Visto que por exemplo Carlos apertando a mão de Bento é o mesmo que Bento apertando a mão de Carlos, temos:

$$C_2^n = 15 \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 15 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = 15$$
$$\Rightarrow n(n-1) = 30 \Rightarrow n^2 - n - 30 = 0 \Rightarrow (n-6)(n+5) = 0 \ \Rightarrow n = 6 \vee n = -5.$$

Visto que n é um número positivo, $n = 6$. A resposta certa é **B**.

8. O número de arranjos de 3 rapazes e 4 raparigas numa fila, se as raparigas têm que ficar juntas é:

   A: $4! \times 4!$ B: $3! \times 4!$ C: $3! \times 2!$ D: $4! \times 4! \times 2!$ E: $3! \times 4! \times 2!$

   Resolução : Podemos considerar que as raparigas juntas é um bloco (um elemento). Assim, vamos permutar 4 elementos dos quais (3 rapazes) e um bloco (inseparável) de 4 raparigas. Então, 4! é o número de todas as permutações. As raparigas juntas, podem permutar entre si, 4! é o número de tais possibilidades. Assim, o total de arranjos é $4! \times 4!$. A resposta certa é **A**.

9. No lançamento de uma moeda não viciada, qual é a probabilidade de, ao lançar 3 vezes, obter-se cara duas vezes?

   A: 3/8 B: 1/4 C: 1/8 D: 5/8 E: 1/2

   Resolução : Seja H cara e T coroa. Temos o seguinte espaço dos resultados possíveis:

   $$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}.$$

   Seja E o evento saida de duas caras. Assim,

   $$P(E) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{3}{8}.$$

   A resposta certa é **A**.

10. De entre as disciplinas de Matemática, Física, Química, Biologia, Geologia e Geografia a Eunice tem que escolher exactamente duas. De quantas maneiras diferentes pode fazer a escolha?

    A: 24 B: 30 C: 15 D: 10 E: 36

    Resolução: Trata-se de agrupamento de 6 elementos tomados 2 a 2, em que a ordem não interessa, pois, escolher Matemática e Biologia é o mesmo que escolher Biologia e Matemática. Assim, o número de tais possibilidades de escolha é:

    $$C_2^6 = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2! \cdot 4!} = 15.$$

    A resposta certa é **C**.

11. No desenvolvimento do binómio $\left(x + \frac{a}{x}\right)^6$, o coeficiente do termo x^4 é 12. Qual é o valor de a?

    A: $\sqrt{15}$ B: 3 C: 1 D: 6 E: 2

    Resolução : Temos:

    $$\left(x + \frac{a}{x}\right)^6 = x^6 + 6 \cdot x^5 \frac{a}{x} + C_2^6 x^4 \cdot \frac{a^2}{x^2} + C_3^6 x^3 \cdot \frac{a^3}{x^3} + \ldots + \frac{a^6}{x^6}.$$

    Assim, o coeficiente do termo x^4 é $6a$. De outro lado, este coeficiente é 12. Desta forma, $6a = 12$, logo $a = 2$. A resposta certa é **E**.

12. A soma dos três primeiros elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 121. Qual o terceiro elemento da linha seguinte:

A: 5 B: 360 C: 105 D: 120 E: 84

Resolução: Seja n o grau do polinômio no binoômio $(x+y)^n$. Assim, os coefientes no triângulo de Pascal são os coeficientes binomiais. Desta forma,

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n = 121 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n!}{2!(n-2)!} = 121$$

$$1 + n + \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = 121 \Leftrightarrow 2 + 2n + n(n-1) = 242$$

$$n^2 + n - 240 = 0 \Leftrightarrow (n-15)(n+16) = 0 \Rightarrow n = 15 \vee n = -16.$$

Tendo em conta que n é positivo, $n = 15$. Desta forma, o terceiro elemento da linha seguinte é $C_2^{16} = \frac{16!}{2!14!} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$. A resposta certa é **D**.

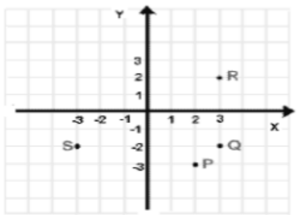
13. Qual dos seguintes conjuntos descreve o domínio da função real de variável real $\frac{x - \log(x)}{x}$?

A: $]-\infty, 1[$ B: $]-\infty, 0[$ C: $]0, \infty[$ D: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ E: $\mathbb{R} \setminus]-1, 1[$

Resolução : Pelo domínio de logarímo temos $x > 0$ e porque x é denominado de uma fracção , $x \neq 0$. Intersectando as duas condições temos: $x > 0$. A resposta certa é **C**.

- Note que as outras alternativas admitem números negativos que não pertencem ao domínio da função $\log(x)$. Por exemplo, $x = -2$, não existe em $\mathbb{R}$, $\log(-2)$.

14. Um ponto dado $V(-3, 2)$ pertence a uma função ímpar $y = g(x)$. Com base nesta afirmação é correcto afirmar que, dos pontos representados na figura ao lado, também pertence a $y = g(x)$ o ponto:

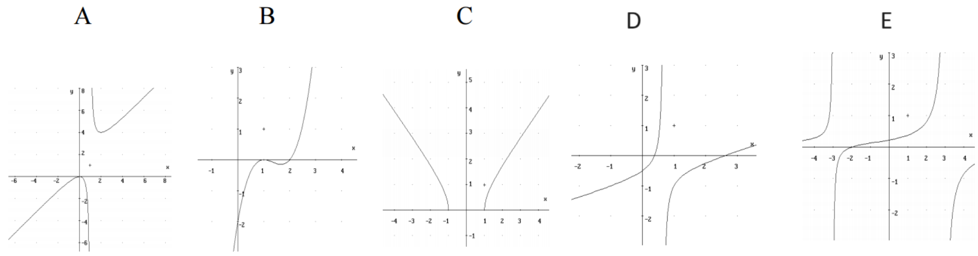


A: S B: Q C: P D: R E: Nenhuma das alternativas anteriores

Resolução : Vemos que Q pertence a $y = g(x)$, $g(3) = -2$ e o ponto $V(-3, 2)$ e por $g(x)$ ser ímpar, $g(-3) = -g(3)$. A resposta certa é **B**.

- S não pertence ao gráfico de $y = g(x)$ pois, $V(-3, 2)$ pertence ao gráfico e S tem mesma abcissa com V, por definição de função esta tem uma única imagem.
- R não pertence ao gráfico de $y = g(x)$ pois, $V(-3, 2)$ pertence ao gráfico e a função é ímpar, por propriedade de função ímpar, o gráfico é simétrico em relação à origem.
- Não dá para tirar conclusões se P pertence ao gráfico.

15. Diga qual dos gráficos a seguir indicados corresponde à função $f(x) = -\frac{x+2}{x^2-9}$:



Resolução : Temos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x+2}{x^2-9}\right)=0 \text{ e } \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x+2}{x^2-9}\right)=0.$$

Então, $y=0$ é assimptota vertical. Mais, vemos que $x=-3$ e $x=3$ não pertencem ao domínio de $f(x)$, $\lim_{x\to-3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=-\infty$. O zero da função é $x=-2$ e a ordenada na origem é $f(0)=2/9$. Estes dados correspondem ao gráfico da alternativa **E**.

- As restantes gráficos não estão certos, pois, por exemplo, nenhum deles tem assimptota horizontal a recta $y=0$.

16. Determine as coordenadas do vértice da seguinte função $f(x)=4x^2-2x+1$.

A: $V(\frac{1}{4};\frac{3}{4})$ B: $V(4;7)$ C: $V(\frac{1}{4};1)$ D: $V(1;3)$ E: $V(\frac{3}{2};\frac{5}{2})$

Resolução : Representemos $f(x)$ na forma $f(x)=a(x-x_v)^2+y_v$. Temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^2-2x+1=4(x^2-\frac{x}{2})+1=4(x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{4^2})+1 \\ &= 4(x-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{4}+1=4(x-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Assim, $x_v=\frac{1}{4}$ e $y_v=\frac{3}{4}$. A resposta certa é **A**.

17. Indique, se existirem, as assímptotas horizontal e vertical da função $f(x)=\frac{5x-1}{4-x}$.

A: AV: $x=0$, AH: $y=1$
B: AV: não existe, AH: $y=-5$
C: AV: $x=4$, AH: não existe
D: AV: $x=4$, AH: $y=5$
E: AV: $x=-4$, AH: $y=5$

Resolução : Temos: $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{5x-1}{4-x}=-5$. Assim, $y=-5$ é assímptota horizontal. Para assimptota vertical, temos $x=4$ não pertence ao domínio, e $\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}\frac{5x-1}{4-x}=+\infty$. Então, $x=4$ é assímptota vertical. A resposta certa é **D**.

18. Seja uma sucessão $1,4,7,10,\dots$ e dois números 147 e 157. Qual das afirmações é correcta?

A. Ambos números são termos da sucessão.
B. Ambos números não são termos da sucessão.
C. O número 147 não é termo da sucessão, mas 157 é.
D. O número 147 é termo da sucessão, mas 157 não.
E. Nenhuma das alternativas anteriores.

Resolução : Temos $a_{n+1} - a_{a_n} = 3,\ n = 1, 2, \ldots$. Assim, os termos da sucessão formam uma pogressão aritmética de razão $d = 3$. O termo geral é $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$. Para cada termo da sucessão corresponde a uma ordem n inteiro e positivo. Temos:

$$147 = 3n - 2 \Rightarrow 3n = 149 \Rightarrow n = \frac{149}{3} \notin \mathbb{Z},\ 157 = 3n - 2 \Rightarrow 3n = 159 \Rightarrow n = \frac{159}{3} = 53 \in \mathbb{Z}.$$

Desta forma, apenas o número 157 é termo da sucessão. A resposta certa é **C**.

19. Considere a sucessão: 5, 9, 13, 17, 21, 25, ... Indique a soma dos 12 primeiros termos.

A: 320 B: 324 C: 380 D: 384 E: 234

Resolução : Temos $a_{n+1} - a_{a_n} = 4,\ n = 1, 2, \ldots$. Assim, os termos da sucessão formam uma pogressão aritmética de razão $d = 3$. O termo geral é $a_n = a_1 + (n-1)d = 5 + 4(n-1) = 4n + 1$. A soma dos primeiros n termos é dada por

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Assim, a soma dos primeiros doze termos é:

$$s_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = (5 + 4 \cdot 12 + 1) \cdot 6 = 324.$$

A resposta certa é **E**.

20. Seja a progressão: 1, 3, 9, 27, 81, ... A soma de n primeiros termos é igual a 364. Determine n.

A: 4 B: 5 C: 6 D: 7 E: 8

Resolução : Temos:

$$\frac{a_{n+1}}{a_{a_n}} = 3,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Assim, os termos da sucessão formam uma pogressão geométrica de razão $q = 3$. O termo geral é $a_n = a_1 q^{(n-1)} = 1 \cdot 3^{(n-1)}$. A soma dos primeiros n termos é dada por

$$s_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q},\ q \neq 1.$$

Assim,

$$364 = \frac{1 - 3^n}{1 - 3} \Leftrightarrow -728 = 1 - 3^n \Leftrightarrow 3^n = 729 \Leftrightarrow 3^n = 3^6 \Leftrightarrow n = 6.$$

A resposta certa é **C**.

21. Numa progressão geométrica $u_3 = 1/8,\ u_6 = 1/64$. Determine a soma dos 5 primeiros termos:

A: 32/31 B: 31/32 C: 63/64 D: 65/64 E: 30/32

Resolução : Temos: $a_m = a_k q^{m-k}, m, k \in \mathbb{N}$, q é a razão. Assim,

$$a_6 = a_3 q^3 \Leftrightarrow \frac{1}{64} = \frac{1}{8} q^3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 = q^3 \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}.$$

A soma dos primeiros n termos é dada por

$$s_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q},\ q \neq 1.$$

Temos $a_1 = a_3 q^{-2} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{2}$. Assim,

$$s_5 = \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^5)}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}.$$

A resposta certa é **B**.

22. Na primeira semana de funcionamento, uma biblioteca registou a entrada de 120 pessoas. Na segunda semana registou 145 e na terceira 170. A quantidade de pessoas a frequentar a biblioteca foi aumentando, em média, igualmente, durante 9 semanas. Quantas entradas foram registadas na 5a semana?

A: 220 B: 240 C: 260 D: 280 E: 300

Resolução : Seja a_n o número de pessoas que frequentaram a biblioteca na n-ésima semana. Assim,

$$a_{n+1} - a_n = 25, \; n = 1, 2, \ldots .$$

Assim, os termos da sucessão formam uma pogressão aritmétrica de razão $d = 25$. O termo geral é $a_n = a_1 + (n-1)d = 120 + 25(n-1) = 25n + 95$. Desta forma

$$a_5 = 25 \cdot 5 + 95 = 125 + 95 = 220.$$

A resposta certa é **A**.

23. Qual o seguinte limite: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$?

A: ∞ B: Não existe C: 3 D: $3e$ E: e^3

Resolução : Temos $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = 1^\infty$ que é uma indeterminação . Assim, usando o limite notável $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, teremos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}\cdot 3} = e^3.$$

A resposta certa é **E**.

24. Qual o limite da sucessão de termo geral $u_n = 1 + e^{-2n}$, $\in \in \mathbb{N}$?

A: $-\infty$ B: -1 C: 1 D: 2 E: ∞

Resolução : Temos: $\lim_{n\to\infty}(1+e^{-2n}) = 1 + e^{-\infty} = 1$. A resposta certa é **C**.

25. Seja a função dada por $f(x) = \begin{cases} x^3+1 & \text{se } x \leq 1 \\ ax^2, & \text{se } x > 1. \end{cases}$ Qual deve ser o valor de a para que a função $f(x)$ seja contínua?

A: 2 B: 1 C: -1 D: 0 E: -2

Resolução : A função $f(x)$ é contínua no ponto x_0 se

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Assim, o ponto que suscita dúvida quanto à continuidade de $f(x)$ é $x = 1$. Verifiquemos a condição de continuidade neste ponto. Temos:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow a = 2.$$

Assim, se $a = 2$ a função $f(x)$ é contínua. A resposta certa é **A**.

26. Determine os limites laterais da seguinte função , quando x tende para 1, $f(x) = -\frac{x^3}{x^2-1}$.

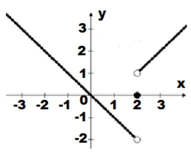
A: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$
B: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$
C: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$
D: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$
E: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$

Resolução : Temos:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -\frac{x^3}{x^2-1} = -\frac{1}{0^-} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} -\frac{x^3}{x^2-1} = -\frac{1}{0^+} = -\infty,$$

pois, $x \to 1^-$ significa que $x < 1$, $x \to 1$, $x \to 1^+$ significa que $x > 1$ e $x \to 1$. A resposta certa é **A**.

27. Na figura está representada parte do gráfico de uma função $f(x)$ de domíno $\mathbb{R}$. O grupo de afirmações verdadeiras é:



A. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$
B. $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq f(2)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq f(2)$, $\lim_{x\to 2} f(x)$ não existe
C. $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq f(2)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$
D. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq f(2)$, $\lim_{x\to 2} f(x)$ não existe
E. $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq f(2)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq f(2)$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

Resolução : Temos:

$$f(2) = 0, \lim_{x\to 2^-} f(x) = -2, \lim_{x\to 2^+} f(x) = 1.$$

Assim, $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq f(2)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq f(2)$ e $\lim_{x\to 2} f(x)$ não existe. A resposta certa é **B**.

28. Calcule o limite, quando $x \to 0$ da função $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$

A: $+\infty$ B: $-\infty$ C: 1 D: 0 E: 2.

Resolução : Temos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+1-(1-x)}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}} = 1.$$

A resposta certa é **C**.

29. A derivada da função $f(x) = 2^{-x} + 2^x + 3$ é:

A: $f'(x) = 2xe^x + 2e^x + 3$
B: $f'(x) = 2x2^{-x} + 2e^x$
C: $f'(x) = 2^{-x} + 2^x$
D: $f'(x) = -2^{-x+1}\ln 2 + 2^x \ln 2 + 3$
E: $f'(x) = -2^{-x}\ln 2 + 2^x \ln 2$

Resolução : Temos:

$$f'(x) = 2^{-x}(\ln 2)\cdot(-x)' + 2^x \ln 2 + 0 = -2^{-x}\ln 2 + 2^x \ln 2.$$

A resposta certa é **E**.

30. Seja f uma função real de variável real tal que $f(x) = f'(x)$ para todo e qualquer número real. Qual das seguintes expressões pode definir a função f:

A: $3x^2$ B: $\sin(x)$ C: e^{5x} D: $2e^x$ E: $\ln(x)$

Resolução : Temos:

- em A, $f'(x) = 6x \neq 3x^2 = f(x)$;
- em B, $f'(x) = \cos x \neq \sin x = f(x)$;
- em C, $f'(x) = 5e^{5x} \neq e^{5x} = f(x)$;
- em D, $f'(x) = 2e^x = 2e^x = f(x)$;
- em E, $f'(x) = \frac{1}{x} \neq \ln x = f(x)$.

A resposta certa é **D**.

31. Determine, se possível, a equação da recta tangente à função $f(x) = \sqrt{x+2}$ no ponto $Q(-1;1)$.

A: $y = x$ B: $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ C: $y = -\frac{x}{2} + 1$ D: Não é possível E: $y = x + 2$

Resolução : A equação da rectaa tangente à curva $f(x)$ no ponto $P(x_0, y_0)$ tema forma $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$. Temos:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \Rightarrow f'(-1) = \frac{1}{2}$$
$$y = f'(-1)(x+1) + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x+1) + 1 = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}.$$

A resposta certa é **B**.

32. Indique, se existirem, os máximos e mínimos da função $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2}$.

A. Não existem
B. Máx. $M(4,0)$; Mín. $P(1,-4)$
C. Máx. $M(4,0)$; Mín. não existe
D. Máx. não existe; Mín. $P(0,0)$
E. Máx. $M(8,0)$; Mín. não existe.

Resolução : Determinemos os pontos críticos. Temos:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2} = 1 - \frac{4}{x^2}$$
$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ f'(x) \neq 0 \wedge f'(0)\ \nexists.$$

Então $x = 0$ é ponto crítico. Estudando o sinal da derivada, teremos:

x	$]-\infty,0[$	0	$]0,\infty[$
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nexists$	$\nearrow$

Desta forma, não existem os valores máximos e mínimos de $f(x)$. A resposta certa é **A**.

- Note que os pontos M e P não são pontos do gráfico de $f(x)$.

33. Considere a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$. Os seus máximos e mínimos são:

A. Máx. $M(3,3)$; Mín. $P(0,0)$
B. Máx. $M(0,3)$; Mín. $P(2,-1)$
C. Máx. $M(3,0)$; Mín. $P(2,-1)$
D. Máx. $M(-1,2)$; Mín. $P(0,3)$
E. Máx. $M(2,-1)$; Mín. $P(0,3)$.

Resolução : Determinemos os pontos críticos. Temos:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow \; f'(x) = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2.$$

Então $x = 0$ e $x = 2$ são pontos críticos.

Estudando o sinal da derivada, teremos:

x	$]-\infty,0[$	0	]0,2[	2	$]2,\infty[$
$f'(x)$	$+$	0	-	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

Desta forma, o máximo é (0,3) e o mínimo é $(2,-1)$. A resposta certa é **B**.

- Note que nas alternativas A, C e D pelo menos um dos pontos P e M não pertence ao gráfico de $f(x)$.

34. A função $f(x)$ definida e contínua num intervalo $[a,b]$, admite $f'(x) > 0$. Então, $f(x)$ em $[a,b]$ é:

A. Monótona.
B. Não é monótona.
C. Decrescente
D. Não é limitada.
E. De diferentes sinais nas extremidades

Resolução : Dá para oncluir que $f(x)$ é monótona crescente. A resposta certa é **A**.

- Note que nas extremidades $f(x)$ pode ter tanto mesmo sinal ou diferentes, dependendo da função . Por exemplo $f(x) = x$ em $[1,2]$, temos $f'(x) = 1 > 0$ e $f(1) > 0$, $f(2) > 0$. O mesmo não acontece com $f(x) = x^2 - 1$ em $[1/2, 2]$.

35. Qual é a expressão para a função primitiva da função $f(x) = 6x^2$.

A: $12x + c$ B: $3x^2 + c$ C: $3x^3 + c$ D: $3x + c$ E: $2x^3 + c$

Resolução : Temos:

$$\int 6x^2 dx = 6 \int x^2 dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} + c = 2x^3 + c,$$

onde c é uma constante arbitrária. A resposta certa é **E**.

- Note que a derivada das funções dadas nas restantes alternativas é diferente de $6x^2$.

36. A primitiva da função $f(x) = \frac{2}{x}$ é:

A: $F(x) = \frac{2}{x^2} + c$ B: $F(x) = \ln(x + c)$ C: $F(x) = 2\ln|x| + c$
D: $F(x) = \frac{1}{x^2} + c$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Temos:

$$\int \frac{2}{x}dx = 2\int \frac{1}{x}dx = 2 \cdot \ln|x| + c,$$

onde c é uma constante arbitrária. A resposta certa é **D**.

- Note que a derivada das funções nas outras alternativas é diferente de $\frac{2}{x}$.

37. A que função corresponde o integral $\int \frac{x^2}{5+x^3}dx$?

A: $\frac{x^3}{5x+x^4}$ B: $\frac{4x^3}{15x+3x^4}$ C: $\ln(5 + x^3)$
D: $\frac{1}{3}\ln|5 + x^3| + c$ E: $(5 + x^3)^{-2}$

Resolução : Fazemos a substituição $t = 5 + x^3$. Teremos, $dt = 3x^2dx$ e

$$\int \frac{x^2}{5 + x^3}d = \int \frac{\frac{1}{3}dt}{t} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + c = \frac{1}{3}\ln|5 + x^3| + c,$$

onde c é uma constante arbitrária. A resposta certa é **D**.

- Note que a derivada das funções nas outras alternativas é diferente de $\frac{x^2}{5+x^3}$.

38. Seja $f(x)$ uma função cuja derivada de segunda ordem é $f''(x) = \sin(x) + 6x$. Sabendo que o gráfico da função contém o ponto $(0, 1)$ e que nesse ponto a recta tangente à função é paralela à recta $y = 3x$, indique a expressão de f:

A: $f(x) = -\sin(x) + x^3 + 4x + 1$
B: $f(x) = -\cos(x) + 6x^3$
C: $f(x) = \sin(x) + 2x^2$
D: $f(x) = -\sin(x) + x^3 + 2x - 3$
E: $f(x) = -\sin(x) + 3x^3 - 1$

Resolução : Temos:

$$\begin{aligned} f'(x) = \int f''(x)dx = \int(\sin(x) + 6x)dx = \int \sin(x)dx + \int 6xdx \\ = -\cos(x) + 3x^2 + c_1. \end{aligned}$$

Sabemos que a recta tangente ao gráfico de f no ponto (0,1) é paralela à recta $y = 3x$, isto é, $f'(0) = 3$. Assim, $f'(0) = -\cos 0 + 3 \cdot 0^2 + c_1 = c_1 - 1 = 3$, então $c_1 = 4$. Destaa forma, $f'(x) = -\cos(x) + 3x^2 + 4$. Assim,

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int(-\cos(x) + 3x^2 + 4)dx = -\sin x + x^3 + 4x + c_2.$$

Usando o facto do ponto (0,1) pertencer ao gráfico de f, temos:

$$f(0) = -\sin 0 + 0^3 + 4 \cdot 0 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 1.$$

Desta forma, $f(x) = -\sin x + x^3 + 4x + 1$. A resposta certa é **A**.

- Note que nas outras alternativas $f(0) \neq 1$.

39. Considere os números complexos $z = 3(\cos 6° + i \sin 6°)$ e $u = 5(\cos 50° + i \sin 50°)$. A forma trigonométrica do complexo $z \cdot u$ é:

    A: $15 - 15\sqrt{3}\, i$ B: $4 - 4\sqrt{3}\, i$ C: $\cos(56°) + i \sin(56°)$
    D: $15(\cos(56°) + i \sin(56°))$ E: $8(\cos(56°) + i \sin(56°))$

    Resolução : Temos:

$$\begin{aligned} z_1 &= |z_1|(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)),\ z_2 = |z_2|(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2)) \\ z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \\ z \cdot u &= 3(\cos 6° + i \sin 6°) \cdot 5(\cos(50°) + i \sin(50°)) \\ &= 3 \cdot 5 \cdot (\cos(6 + 50) + i \sin(6 + 50)) = 15(\cos(56) + i \sin(56)). \end{aligned}$$

    A resposta certa é **D**.

40. A que valor equivale o número complexo $\frac{a+i}{1-ai}$, onde $a \in \mathbb{R}$.

    A: ai B: 1 C: $-i$ D: $-a$ E: i

    Rsolução : Temos:

$$\frac{a+i}{1-ai} = \frac{(a+i)(1+ai)}{(1-ai)(1+ai)} = \frac{a + a^2 i + i - a}{1 + a^2} = \frac{a^2 i + i}{a^2 + 1} = \frac{(a^2+1)i}{(a^2+1)} = i.$$

    A resposta é **E**.

    - Note que se $a = 0$ obtemos $\frac{(a+i)(1+ai)}{(1-ai)(1+ai)} = i$ mas este resultado não obtemos substituindo $a = 0$ nas expressões das outras alternativas.

Exame de Matemática IV de 2021

Correcção do exame de Matemática IV de 2021

1. O conjunto das soluções da inequação $-5 < |2x+3| < 1$ é:

   A: $\emptyset$ B: $]-2,-1[$ C: $]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$ D: $]-2,1[$ E: $]-\infty,-2[\cup]-2,-1[\cup]1,\infty[$

   Resolução: Temos: $-5 < |2x+3| < 1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -5 < 2x+3 < 1, \quad \text{se } 2x+3 \geq 0 \\ \vee \\ -5 < -2x-3 < 1, \quad \text{se } 2x+3 < 0 \end{array}\right.$

   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -5-3 < 2x < 1-3, \quad \text{se } 2x+3 \geq 0 \\ -5+3 < -2x < 1+3, \quad \text{se } 2x+3 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -4 < x < -1, \quad \text{se } x \geq -3/2 \\ \vee \\ -2 < x < 1, \quad \text{se } x < -3/2 \end{array}\right.$$

   $$\Rightarrow -3/2 \leq x < -1 \vee -2 < x < -3/2 \Rightarrow -2 < x < -1.$$

   A resposta certa é B.

   - As outras alternativas não estão certas, pois, ou excluem valores que pertencem ao conjunto solução ou incluem valores que não pertencem ao conjunto solução. Por exemplo, $x=0$ e $x=2$ não satisfazem a inequação, portanto, C, D e E não estão certas. Por outro lado, $x=-3/2$ satisfaz a inequação, logo, A não está certa.

2. A professora convidou alunos das disciplinas de Matemática, Física, Química, Geografia, História para destas escolher três que eles mais gostam. Quantas escolhas diferentes existem?

   A: 60 B: 30 C: 15 D: 10 E: 8

   Resolução : Designando cada disciplina pelas suas inicias, teremos por exemplo, os seguintes possíveis resultados: MHF, FQG e os seguintes não admissíveis MMQ, FGF, ou seja, não pode haver repetição de disciplinas. Assim, trata-se de agrupamentos de 5 elementos tomados 3 a 3 sem repetição e onde a ordem não interessa. Temos:

   $$C_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{2!\cdot 3!} = 10. \text{ A resposta certa é } \mathbf{D.}$$

   - Note que é possível listar todos os casos possíveis, ou seja, MFQ, MFH, MFG, MQH, MQG, MHG, FQH, FQG, FHG, QHG.

3. Um teste consiste de três perguntas, cada uma das quais contém cinco alternativas de resposta, sendo uma única delas correcta. Um aluno marcou as respostas aleatoriamente. Qual é a probabilidade de que pelo menos duas respostas são correctas?

A: 0.325 B: 0.8 C: 0.104 D: 0.24 E: 0.248

Resolução : Seja E o evento "marcação da alternativa certa entre 5 alternativas". A probabilidade do evento E occorrer é $P(E) = \frac{1}{5}$.

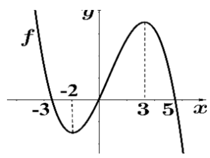
Seja A o evento "marcação de pelo menos duas alternativas certas em três perguntas". Temos, os seguintes casos possíveis EEE^c, EEE, E^cEE, EE^cE, onde E^c é o evento complementar de E. Assim, usando propriedade

$$\begin{aligned} P(A) &= P(EEE^c) + P(EE^cE) + P(E^cEE) + P(EEE) \\ &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{13}{125} = 0,104. \end{aligned}$$

A resposta certa é **C.**

- Note que é possível usar o evento complementar de A, que seria "marcação de no máximo uma alternativa certa em três perguntas".

4. Atendendo ao gráfico da função $y = f(x)$ na figura, escolha a proposição verdadeira.



A. No intervalo $[-2, 1]$, a função f é crescente e toma valores positivos;
B. No intervalo $[3, 8]$, a função f é decrescente e toma valores negativos;
C. No intervalo $[-2, -1]$, a função f é crescente e toma valores negativos;
D. No intervalo $[2, 3]$, a função f é decrescente e toma valores positivos;
E. No intervalo $[-3, -1]$, a função f é decrescente e toma valores negativos;

Resolução : Temos:

- No intervalo $[-2, 1]$, $f(x)$ é crescente e toma valores tanto positivos assim como negativos. Desta forma, a alternativa A está errada.
- No intervalo $[3, 8]$, $f(x)$ é decrescente e toma valores tanto positivos assim como negativos. Desta forma, a alternativa B está errada.
- No intervalo $[-2, -1]$, $f(x)$ é crescente e toma valores tanto negativos. **Desta forma, a alternativa C está certa**.
- No intervalo $[2, 1]$, $f(x)$ é crescente e toma valores positivos. Desta forma, a alternativa D não está certa .
- No intervalo $[-3, -1]$, $f(x)$ é não é monótona e toma valores tanto não positivos. Desta forma, a alternativa E está errada.

A resposta certa é **C.**

5. Qual é o termo geral a_n, da sucessão $-1, \frac{2}{3}, -\frac{4}{5}, \frac{8}{7}, \ldots$?

A: $\dfrac{(-1)^n 2^{n-1}}{2n-1}$ B: $\dfrac{(-1)^{n+1} 2^{n-1}}{2n+1}$ C: $\dfrac{(-1)^n 2^n}{2n-1}$ D: $\dfrac{(-1)^{n+1} 2^{n-1}}{2n-1}$ E: $\dfrac{(-1)^n 2^{n-1}}{2n+1}$

Resolução : Vemos que o valor absoluto do numeradores são $1, 2, 4, 8, ..$, ou seja, uma progressão geométrica de razão $q = 2$. O termo geral de uma progressão geométrica de razão q é $u_n = u_1 q^{n-1}$. Assim o termo geral dos valores absolutos do numerador é $u_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$. De outro lado, o valor absoluto dos denominadores são $1, 3, 5, 7, ..$, ou seja, uma progressão aritmética de razão $d = 2$. O termo geral de uma progressão aritmética de razão d é $v_n = v_1 + d(n-1)$. Assim o termo geral dos valores absolutos do denominador é $v_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$. Tendo em conta a alternância do sinal, teremos:

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^{n-1}}{2n-1}.\text{ Logo, a resposta certa é } \mathbf{A.}$$

- As outras alternativas não estão certas, pois, por exemplo, para $n = 1$, não obtemos $a_1 = -1$.

6. Seja $a_1, a_2, a_3, \ldots$ a sucessão dos números de mosquitos numa região no início dos anos 2010, 2011, 2012, $\ldots$, sendo $a_1 = 10^9$. O número de mosquitos diminui anualmente em 10%. Qual é o número de mosquitos na região no início de 2019?

A: $9^{10}/10$ B: 11^8 C: 9^9 D: 10^8 E: $11^8 \cdot 10$

Resolução : Vamos determinar a_n e depois calcular a_{10} que corresponde ao ano 2019. Temos,

$$a_2 = a_1 - 10\% \cdot a_1 = a_1 - 0,1 \cdot a_1 = 0,9 \cdot a_1$$
$$a_3 = a_2 - 10\% \cdot a_2 = a_2 - 0,1 \cdot a_2 = 0,9 \cdot a_2 = 0,9 \cdot 0,9a_1 = (0,9)^2 a_1$$
$$a_4 = a_3 - 10\% \cdot a_3 = a_3 - 0,1 \cdot a_3 = 0,9 \cdot a_3 = 0,9 \cdot (0,9)^2 a_1 = (0,9)^3 a_1$$
$$\ldots$$
$$a_n = (0,9)^{n-1} a_1 = \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} a_1 \Longrightarrow a_{10} = \left(\frac{9}{10}\right)^{10-1} a_1 = \left(\frac{9^9}{10^9}\right) 10^9 = 9^9.$$

A resposta certa é **C.**

7. Qual é o valor do limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{15 - x - 8x^2}{(2x-1)(x+5)}$?

A: -5 B: 0 C: 15 D: $+\infty$ E: -4

Resolução : Temos: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{15 - x - 8x^2}{(2x-1)(x+5)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(15/x^2 - 1/ - 8)}{x^2(2 - 1/x)(1/x + 5/x)} = \frac{-8}{2} = -4.$

A resposta certa é **B.**

8. Qual é o valor do parâmetro real h para que a função $f(x) = \begin{cases} x + h, & \text{se } x > 1 \\ x + 1, & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$ seja contínua no ponto $x = 1$.

A: -2 B: 1 C: 0 D: -1 E: 2

Resolução : A função $f(x)$ é contínua no ponto x_0 se $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Verifiquemos a condição de continuidade neste ponto $x = 1$. Temos: $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow 2 = 1 + h \Rightarrow h = 1$. Assim, se $h = 1$ a função $f(x)$ é contínua. A resposta certa é B.

9. Qual é a primeira derivada da função $f(x) = \dfrac{x^2+1}{1-3x^2}$?

A: $\frac{2x}{1-3x^2}$ B: $-\frac{12x^3+4x}{(1-3x^2)^2}$ C: $-1/3$ D: $\frac{8x}{(1-3x^2)^2}$ E: $\frac{x^2+1}{9x^2-3}$

Resolução : Temos:

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)'(1-3x^2) - (1-3x^2)'(x^2+1)}{(1-3x^2)^2} = \frac{2x(1-3x^2) + 6x(x^2+1)}{(1-3x^2)^2}$$

$$= \frac{2x - 6x^3 + 6x^3 + 6x}{(1-3x^2)^2} = \frac{8x}{(1-3x^2)^2}. \quad \text{A resposta certa é } \mathbf{D.}$$

10. Qual é a inclinação (coeficiente angular) da recta tangente ao gráfico da função $f(x) = \sqrt{1-4x}$ no ponto $x = 0$?

    A: -2 B: $-0,5$ C: 15 D: $0,5$ E: 2

    Resolução: O coeficiente angular da recta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $x = 0$ é $f'(0)$. Temos:

$$f'(x) = \frac{(1-4x)'}{2\sqrt{1-4x}} = \frac{-4}{2\sqrt{1-4x}} = -\frac{2}{\sqrt{1-4x}} \Longrightarrow f'(0) = -2. \quad \text{A resposta certa é } \mathbf{A.}$$

11. O ponto máximo da função $f(x) = 1 + 12x - x^3$ é ?

    A: $x = 1$ B: $x = -1$ C: $x = 2$ D: $x = -2$ E: não existe

    Resolução : Vamos procurar os pontos críticos. Temos,

$$f'(x) = 12 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 12 - 3x^2 = 0 \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2.$$

Estudando o sinal da derivada, teremos:

x	$]-\infty, -2[$	-2	]-2,2[	2	$]2, \infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-15	$\nearrow$	17	$\searrow$

Desta forma, o máximo é 17 que é atingido quando $x = 2$. A resposta certa é **C.**

12. Qual é a expressão geral para a função primitiva da função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$?

    A: $-\frac{3}{4}\sqrt{(2x+1)^{-3}} + c$ B: $\frac{1}{4}\sqrt{(2x+1)} + c$ C: $2\sqrt{(2x+1)^{-1}} + c$
    D: $\sqrt{(2x+1)} + c$ E: $-3\sqrt{(2x+1)^{-3}} + c$

    Resolução: Fazendo substituição $u = 2x + 1$, teremos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}, \; u = 2x+1, \; du = 2dx \Longrightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + c = \sqrt{2x+1} + c,$$

onde c é constante arbitrária. A resposta certa é **D.**

13. O número complexo $z = (1+i)^2$ é igual a:

    A: $-2i$ B: $2 + 2i$ C: 1 D: $2 - 2i$ E: $2i$

Resolução : Temos: $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$. A resposta certa é **E.**

14. Sejam P, Q duas proposições verdadeiras. Escolha proposição verdadeira.

    A: $\sim (P \vee \sim Q)$ B: $P \rightarrow \sim Q$ C: $(P \vee \sim Q) \wedge (\sim P)$ D: $\sim P \rightarrow Q$ E: $\sim P \wedge Q$

    Resolução : Temos:

    - O valor de verdade da proposição $\sim (P \vee \sim Q)$ é falso, pois, a disjunção $P \vee Q$ é verdadeira e a sua negação é falsa. Então, a alternativa A não é a correcta.

- O valor de verdade da proposição $P \to \sim Q$ é falso, pois, P é verdadeira e $\sim Q$ é falsa, que é o caso em que uma condicional toma o valor de verdade falso. Então, a alternativa B não é a correcta.
- O valor de verdade da proposição $(P \vee \sim Q) \wedge (\sim P)$ é falso, pois uma conjunção toma o valor de verdade falso quando ao menos uma das proposições é falsa que é o caso de $\sim P$. Então, a alternativa C não é a correcta.
- O valor de verdade da proposição $\sim P \to Q$ é verdade, pois, uma condicional apenas é falsa quando a primeira for verdadeira e a segunda for falsa, que não é o caso. Então, **a alternativa D é a correcta.**
- O valor de verdade da proposição $\sim P \wedge Q$ é falso, pois $\sim P$ é falsa e uma conjunção é falsa quando pelo menos uma das proposições é falsa. Então, a alternativa E não é a correcta.

A resposta certa é **D.**

15. Escolha a proposição verdadeira:

A. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > -4$ B. $\exists x \in \mathbb{N},\ x < 0$ C. $\forall x \in \mathbb{R},\ 2^x = 1$ D. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = -3$ E. $\forall x \in \mathbb{Z},\ x^8 > 0$

Resolução : Temos:

- O valor de verdade da proposição $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > -4$ é vedadeiro, pois, o quadrado de um númeor rela é sempre um número não negativo, logo é maior que -4. Então, **a alternativa A é a correcta.**
- O valor de verdade da proposição $\exists x \in \mathbb{N},\ x < 0$ é falso, pois, todo o número natural é não negativo. Então, a alternativa B não é a correcta.
- O valor de verdade da proposição $\forall x \in \mathbb{R},\ 2^x = 1$ é falso, pois, por exemplo, $x = 2 \in \mathbb{R},\ 2^2 \neq 1$. Então, a alternativa C não é a correcta.
- O valor de verdade da proposição $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = -3$ é falso, pois, por exemplo, $x = 0,\ |0| \neq -3$. Então, a alternativa D não é a correcta.
- O valor de verdade da proposição $\forall x \in \mathbb{Z},\ x^8 > 0$ é falso, pois, por exemplo, $x = 0 \in \mathbb{Z},\ 0^8 \not> 0$. Então, a alternativa E não é a correcta.

A resposta certa é A.

16. O domínio de existência da expressão $\sqrt{x-3} + \log_3^{(2-x)}$ é:

A: $]-\infty, 2[\cup[3, \infty[$ B: $[3, \infty[$ C: $]-\infty, 2[$ D: $]2, 3]$ E: $\emptyset$

Resolução : Temos, $x - 3 \geq 0 \wedge 2 - x > 0 \Rightarrow x \geq 3 \wedge -x > -2 \Longrightarrow x \geq 3 \wedge x < 2 \Rightarrow x \in \emptyset$.

A resposta certa é **E**.

- Por outro lado, em A e C , $x = -1$ não pertence ao domínio de existência de $\sqrt{x-3}$.
- Em B, $x = 4$ não pertence ao domínio de $\log_3^{2-x}$.

17. Qual é a expressão equivalente à expressão $(a^{1/6}+1)(a^{1/2}+1)(a^{1/3}-a^{1/6}+1)$.

A: $a-1$ B: $1+2\sqrt{a}+a$ C: $2a^{1/6}$ D: $1-2\sqrt{a}+a$ E: $a+1$

Resolução : Temos:

$$(a^{1/6}+1)(a^{1/2}+1)(a^{1/3}-a^{1/6}+1) = (a^{2/3}+a^{1/6}+a^{1/2}+1)(a^{1/3}-a^{1/6}+1)$$
$$= a - a^{5/6} + a^{2/3} + a^{1/2} - a^{1/3} + a^{1/6} + a^{5/6} - a^{2/3} + a^{1/2} + a^{1/3} - a^{1/6} + 1 = a + 2\sqrt{a} + 1$$

A resposta certa é **B.**

18. Um casaco após o aumento de preço de 25% começou a custar 3.000 MT. Quanto custou o casaco antes do aumento de preço?

    A: 2.925 Mt B: 3.750 Mt C: 2.400 Mt D: 2.250 Mt E: 750 Mt

    Resolução : Temos:

$$P = P_0 + 25\% \cdot P_0 \Rightarrow P = 1,25P_0 \Rightarrow 3000 = 1,25P_0 \Rightarrow P_0 = \frac{3000}{1,25} = 2400.$$

    Assim, o preço inicial é 2400 Mt. A resposta certa é **C.**

19. O preço de um produto primeiro aumentou em 40%, depois diminuiu em 40%. Como o preço final do produto mudou em relação ao seu preço inicial?

    A: não mudou B: diminuiu 16% C: diminuiu 12% D: aumentou 20% E: diminuiu 24%

    Resolução : Temos:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + 40\% \cdot P_0 \Rightarrow P = 1,4P_0 \Rightarrow P_2 = P_1 - 40\% \cdot P_1 = 0,6 \cdot P_1 = 0,6 \cdot 1,4P_0 = 0,84\dot{P}_0 \\ &= (1 - 0,16)P_0 = P_0 - 0,16P_0 = P_0 - 16\% \cdot P_0. \end{aligned}$$

    Assim, o preço final em relação ao inicial, diminuiu 16%. A resposta certa é **B.**

20. A população N de um determinado tipo de animal diminui de acordo com a regra $N(t) = 250 \cdot 2^{-0,15t}$, onde t é o tempo medido em meses. Depois de quantos meses a população vai diminuir oito vezes?

    A: 12 meses B: 16 meses C: 20 meses D: 24 meses E: 32 meses

    Resolução : A popolução inicial é $N(0) = 250$ e depois de um tempo t, a população é $N(0)/8$. Temos:

$$\frac{N(0)/8}{N(0)} = \frac{250 \cdot 2^{-0,15t}}{250} \Rightarrow \frac{1}{8} = 2^{-0,15t} \Rightarrow 2^{-3} = 2^{-0,15t} \Rightarrow -3 = -0,15t \Rightarrow t = \frac{3}{0,15} = 20.$$

    Depois de 20 meses a população vai diminuir oito vezes. A resposta certa é **C.**

21. Única raiz da equação $(\sqrt{2})^{2x+1} = 0,25$ é igual a:

    A: $-2,5$ B: $1,5$ C: $\sqrt[4]{2}$ D: $-0,125$ E: $6,25$

    Resolução : Temos:

$$\begin{aligned} (\sqrt{2})^{2x+1} = 0,25 \Leftrightarrow 2^{\frac{2x+1}{2}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{\frac{2x+1}{2}} = 2^{-2} \Rightarrow \frac{2x+1}{2} = -2 \\ \Rightarrow 2x + 1 = -4 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} = -2,5. \end{aligned}$$

    A resposta certa é **A.**

22. O produto das raízes da equação $10^{x^2+5x} = 0,001$ é igual a:

    A: -5 B: 3 C: -15 D: -3 E: 5

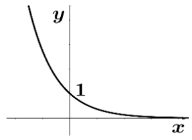
    Resolução : Temos:

$$\begin{aligned} 10^{x^2+5x} = 0,001 \Rightarrow 10^{x^2+5x} = 10^{-3} \Rightarrow x^2 + 5x = -3 \\ \Rightarrow x^2 + 5x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}. \end{aligned}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-5-\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{-5+\sqrt{13}}{2} = \frac{1}{4}\left[(-5)^2 - \left(\sqrt{13}\right)^2\right] = \frac{25-13}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

Assim, as raízes existem e o seu produto é 3. A resposta certa é **B.**

23. Qual é a função cujo gráfico está apresentado na figura ao lado.
A: $f(x) = a^x$, sendo $a > 0$ B: $f(x) = \log_a^x$, sendo $0 < a < 1$
C: $f(x) = x^a$, sendo $a < 0$ D: $f(x) = \log_a^x$, sendo que $a > 1$
E: $f(x) = a^x$, sendo $0 < a < 1$



Resolução : Temos:

- Para $f(x) = a^x$, sendo $a > 0$, o gráfico pode ser crescente, se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Então esta não é uma resposta exacta.
- Para $f(x) = \log_a^x$, sendo $0 < a < 1$, o domínio é $x > 0$, logo vemos que não concorda com o domínio da função apresentada no gráfico. Assim, a alternatia B não é a correcta.
- Para $f(x) = x^a$, sendo $a < 0$, $x = 0$ ão pertence ao domínio, logo vemos que não concorda com o domínio da função apresentada no gráfico. Assim, a alternatia C não é a correcta.
- Para $f(x) = \log_a^x$, sendo que $a > 1$, o domínio é $x > 0$, logo vemos que não concorda com o domínio da função apresentada no gráfico. Assim, a alternatia B não é a correcta.
- Para $f(x) = a^x$, sendo $0 < a < 1$, o domínio é $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$, é monótona decrescente, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Logo vemos que concorda com as caracteríticas da função apresentada no gráfico. Assim, **a alternativa E é a correcta.**

A resposta certa é **E.**

24. O número $\log_{\sqrt{6}}^4 + 2\log_{\sqrt{6}}^3$ é igual a:

A: 4 B: $-1/6$ C: $6\sqrt{6}$ D: -36 E: 1

Resolução : Temos:

$$\log_{\sqrt{6}}^4 + 2\log_{\sqrt{6}}^3 = \log_{\sqrt{6}}^4 + \log_{\sqrt{6}}^{3^2} = \log_{\sqrt{6}}^{4\cdot 9} = \log_{\sqrt{6}}^{36} = \log_{\sqrt{6}}^{6^2} = 2\log_{\sqrt{6}}^{(\sqrt{6})^2} = 4\log_{\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} = 4.$$

25. Única raiz da equação $3\log_{\sqrt{8}}^x + \log_{0,5}^9 = 0$ é igual a:

A: 1/3 B: 1/2 C: 1 D: 2 E: 3

Resolução : Tendo em conta o domínio da função log, teremos:

$$3\log_{\sqrt{8}}^x + \log_{0,5}^9 = 0 \Leftrightarrow \log_{2^{3/2}}^{x^3} + \log_{1/2}^9 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}\log_2^{x^3} + \log_{2^{-1}}^9 = 0$$
$$\Leftrightarrow \log_2^{x^{3\cdot 2/3}} - \log_2^9 = 0 \Leftrightarrow \log_2^{x^2} = \log_2^9 \Rightarrow x^2 = 3^2 \Longrightarrow x = 3.$$

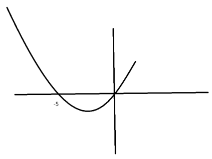
A resposta certa é **E.**

26. O conjunto de soluções da inequação $\log_{0,5}^{(-5x)} > 2\log_{0,5}^{-x}$ é:

A. $]0, \infty[$ B. $]-\infty, -5[$ C. $]-\infty, 0[$ D. $]-5, 0[$ E. $]-\infty, -5[\cup]0, \infty[$

Resolução : Pelo domínio de log temos $-5x > 0$ e $-x > 0$, de onde resulta $x < 0$. Nesta condições , temos ainda que

$$\log_{0,5}^{(-5x)} > 2\log_{0,5}^{-x} \Rightarrow \log_{0,5}^{(-5x)} > \log_{0,5}^{(-x)^2} \Rightarrow -5x < (-x)^2 \Rightarrow x^2 + 5x > 0.$$



Assim, resolvendo graficamnete, temos o gráfico ao lado.
A solução é $]-\infty, -5[$. A resposta certa é **B.**

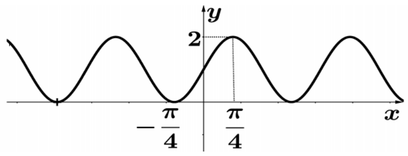
27. A distância entre pontos $A(2;4)$ e $B(-1;8)$ no plano é igual a:
A. $5\sqrt{2}$ B. 30 C. $10\sqrt{13}$ D. 5 E. $\sqrt{17}$
Resolução : A distância entre os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ é:
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$
Assim,
$$d(A, B) = \sqrt{(-1-2)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$
A resposta certa é **D.**

28. Qual é a equação da circunferência com centro no ponto com coordenadas $(-1;1)$ e do raio 4?
A. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ B. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 16$ C. $-x^2 + y^2 = 4$
D. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$ E. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 16$
Resolução : A equação da circunferência de centro (x_0, y_0) e raio r tem a forma:
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$
Temos:
$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 16.$$
A resposta certa é **B.**

29. Determine o valor do parâmetro h de tal modo que as rectas no plano dadas pelas equações $hx-2y+3=0$ e $3x+4y-1=0$ sejam perpendiculares.
A. $-3/2$ B. $2/3$ C. $-4/3$ D. $-1/3$ E. $8/3$
Resolução : Escrevemos ambas equações das rectas na forma $y = ax + b$. Temos:
$$y = \frac{h}{2}x - \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}.$$
A condição de perpendicularidade de rectas no plano é $a_1 \cdot a_2 = -1$, onde a_1 e a_2 são os declives de cada uma das rectas. Assim,
$$\frac{h}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -1 \Rightarrow h = \frac{8}{3}.$$
A resposta certa é **E.**

30. Os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm as mesmas direcções e mesmos sentidos, além disso, a norma (comprimento) do vector $\vec{u}$ é dupla da norma do vector $\vec{v}$. Então, podemos afirmar que:
A: $\vec{u} + 2\vec{v} = 0$ B: $2\vec{u} - \vec{v} = 0$ C: $\vec{u} - 2\vec{v} = 0$ D: $2\vec{u} + \vec{v} = 0$ E: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$
Resolução : Os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, pois tem mesma direcção . Assim, $\vec{u} = k\vec{v}$, para certo escalar k. Note que $k > 0$ porque $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem mesmo sentido. A norma de $|\vec{u}| = 2|\vec{v}|$. Assim, $|\vec{u}| = |k\vec{v}| = k|\vec{v}|$. Desta forma, $k = 2$. Logo, $\vec{u} = 2\vec{v}$ ou seja $\vec{u} - 2\vec{v} = 0$. A resposta certa é **C.**

31. Qual é a função cujo gráfico está apresentado na figura abaixo?



A: $f(x) = 1 + \sin(2x)$ B: $f(x) = 1 + \cos(2x)$ C: $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$ D: $f(x) = 1 + 2\cos(x)$
E: $f(x) = 1 + 2\sin(x)$

Resolução : Temos:

- Para $f(x) = 1 + \sin(2x)$ temos $-1 \leq \sin(2x) \leq 1$, logo $0 \leq 1 + \sin(2x) \leq 2$. Esta função tem período π, $f(0) = 1$, $f(\pi/4) = 2$, $f(-\pi/4) = 0$. Todas estas propriedades concordam o gráfico apresentado.
- Para $f(x) = 1 + \cos(2x)$ temos $f(\pi/4) = 1 \neq 2$, logo esta função não representa a expressão analítica da função do gráfico apresentado.
- Para $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$ temos $f(\pi/4) = \sqrt{2} \neq 2$, logo esta função não representa a expressão analítica da função do gráfico apresentado.
- Para $f(x) = 1 + 2\cos(x)$ temos $f(\pi/4) = 1 + \sqrt{2} \neq 2$, logo esta função não representa a expressão analítica da função do gráfico apresentado.
- Para $f(x) = 1 + 2\sin(x)$ temos $f(\pi/4) = 1 \neq 2$, logo esta função não representa a expressão analítica da função do gráfico apresentado.

A resposta certa é **A.**

32. Qual é a raiz da equação $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sqrt{3}\sin(\pi + x) = 0$ no intervalo $[0, \pi]$?

A: $\pi/3$ B: $5\pi/6$ C: $3\pi/4$ D: $\pi/6$ E: $2\pi/3$

Resolução : Temos:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sqrt{3}\sin(\pi + x) = 0 \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{2})\cos(x) + \cos(\frac{\pi}{2})\sin(x) - \sqrt{3}\left(\cos(\pi)\sin(x) + \sin(\pi)\cos(x)\right) = 0$$

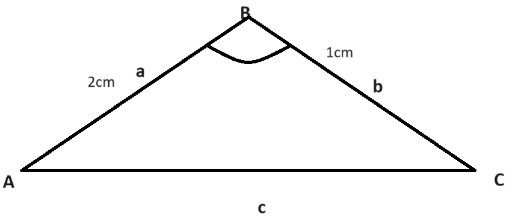
$$\Leftrightarrow \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 0 \Leftrightarrow \tan(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow x = \frac{5\pi}{6}$$

Pois, $\tan(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. A resposta certa é **B**.

33. Os dois lados dum triângulo medem 1 cm e 2 cm, e o ângulo entre si mede $120°$. Qual é a medida do terceiro lado do triângulo?

A: $\sqrt{3}$cm B: $\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$cm C: $\sqrt{7}$cm D: $\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$cm E: $\sqrt{5}$cm

Resolução : Temos:



Usando o teorema dos cossenos temos: $c^2 = a^2+b^2-2a\cdot b\cos(120°) = 2^2+1^2-2\cdot2\cdot1\cos(120°) = 5+4\cdot\dfrac{1}{2} = 7$. Assim, $c = \sqrt{7}cm$. Logo, a resposta certa é **C**.

34. A renda de uma empresa y (em milhões de meticais) depende da produção x de um certo bem (em milhares de unidades) pela expressão $y = x^2 - 2x + 9$. Que nível mínimo de produção fornece a renda da empresa não inferior a 57 milões MT?

A: 2 mil unidades B: 4 mil unidades C: 6 mil unidades D: 8 mil unidades E: 10 mil unidades

Resolução : Temos:

$$y = x^2 - 2x + 9 = x^2 - 2x + 1 + 8 = (x-1)^2 + 8.$$

O gráfico tem a concavidade voltada para cima e é crescente no intervalo de $[1, +\infty[$. Assim,

$$57 = x^2 - 2x + 9 \Rightarrow x^2 - 2x - 48 = 0 \Rightarrow (x-8)(x+6) = 0 \Rightarrow x = 8 \vee x = -6.$$

Visto que x (número de unidades) deve ser não negativo, $x = 8$. A resposta certa **D.**

35. A soma de todas as raízes reais diferentes da equação $(x^2+2x)^2 - 2(x^2+2x) - 3 = 0$ é igual a:

A: -3 B: -2 C: -1 D: 0 E: 1

Rsolução : Fazendo $t = x^2 + 2x$, teremos:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-3)(t+1) = 0 \Rightarrow t_1 = -1 \wedge t_2 = 3.$$

Se $t_1 = -1$, teremos

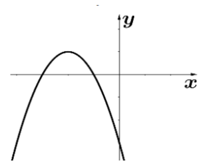
$$x^2 + 2x = -1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -1.$$

Se $t_2 = 3$, teremos

$$x^2 + 2x = 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow x_3 = -3, x_4 = 1.$$

A soma de todas raízes diferentes é -3, i.e., ignorando a multiplicidade. Se não igonaramos a multiplcidade das raízes, teremos $-1-1+1-3 = -4$. A resposta é **A.**

36. Os parâmetros da função quadrática $f(x) = ax^2+bx+c$ na figura ao lado satisfazem a condição:



A: $a<0,\ b>0,\ c<0$ B: $a>0,\ b<0,\ c<0$ C: $a<0,\ b<0,\ c>0$
D: $a>0,\ b>0,\ c>0$ E: $a<0,\ b<0,\ c<0$

Resolução :

- Se $a<0$, $b>0$, $c<0$, o gráfico correspondente tem a concavidade virada para baixo, a ordenada na origem é c, e é negativa. As coordenadas do $x_v = -b/2a$, e é positivo, pois, $a<0$. Assim, o eixo de simetria da parápola fica à direita do eixo das ordenadas OY. Esta última característica não corresponde ao gráfico apresentado. A alternativa A não é a correcta.

- Se $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$, o gráfico correspondente tem a concavidade virada para cima, a ordenada na origem é c, e é negativa. Estas características não correspondem ao gráfico apresentado. A alternativa B não é a correcta.
- Se $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$, o gráfico correspondente tem a concavidade virada para baixo, a ordenada na origem é c, e é positiva. Estas última características não correspondem ao gráfico apresentado. A alternativa C não é a correcta.
- Se $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, o gráfico correspondente tem a concavidade virada para cima, a ordenada na origem é c, e é positiva. Estas características não correspondem ao gráfico apresentado. A alternativa D não é a correcta.
- Se $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$, o gráfico correspondente tem a concavidade virada para baixo, a ordenada na origem é c, e é negativa. As coordenadas do $x_v = -b/2a$, e é negativo, pois, $a < 0$, $b < 0$. Assim, o eixo de simetria da parápola fica à esquerda do eixo das ordenadas OY. Estas características correspondem ao gráfico apresentado. A **alternativa E é a correcta.**

A resposta certa é **E.**

37. Dos 50 alunos duma turma, 34 gostam de Álgebra, 15 gostam de Álgebra e Geometria, 10 não gostam nem de Álgebra nem de Geometria. Quantos alunos gostam de Geometria?

A: 6 B: 21 C: 16 D: 31 E: 19

Resolução : Seja A o conjunto de alunos que gostam de Álgebra, G o conjunto de alunos que gostam de Geometria. Assim, $\#(C)$ designa número de elementos do conjunto C. O conjunto $A \cup G$ é composto por alunos que gostam de pelo menos uma das disciplinas: Álgebra e Geometria. O conjunto $(A \cup G)^c$, conjunto complementar de $A \cup G$, é composto por alunos que não gostam nem de Álgebra e nem de Geometria. Assim,

$$\#(A \cup G) + \#((A \cup G)^c) = 50 \Rightarrow \#(A \cup G) + 10 = 50 \Rightarrow \#(A \cup G) = 40.$$

De outro lado,

$$\#(A \cup G) = \#(A) + \#(G) - \#(A \cap G) \Leftrightarrow 40 = 34 + \#(G) - 15 \Rightarrow \#(G) = 21.$$

A resposta certa é **B.**

38. O número real $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^{-1} + (\sqrt{3} + \sqrt{5})^{-1}$ é igual a:

A: $-\sqrt{3}$ B: $-\sqrt{5}$ C: 1 D: $\sqrt{5}$ E: $\sqrt{3}$

Resolução : Temos:

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} - \sqrt{5})^{-1} + (\sqrt{3} + \sqrt{5})^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} \\ &= \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5})} + \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})} \\ &= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{3 - 5} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{3 - 5} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

A resposta certa é **A.**

39. Qual é a solução do sistema de inequações $\begin{cases} 1 - 2x > 5 \\ 4 + 2x < 2 \end{cases}$?

A: $\emptyset$ B: $]-\infty, -2[$ C: $]-2, -1[$ D: $]-\infty, -1[$ E: $]-\infty, -2[\cup]-1, \infty[$

Resolução : Temos: $\left\{\begin{array}{l} 1-2x>5 \\ 4+2x<2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x>4 \\ 2x<-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x<-2 \\ x<-1 \end{array}\right. \Rightarrow x<-2.$

A resposta certa é **B.**

- A alternativa A não está certa, pois, por exemplo, $x=-3$ satisfaz o sistema de inequações .
- As alternativas C e D não estão certas, pois, por exemplo, $x=-3/2$ não satisfaz o sistema de inequações .
- A alternativa E não está certa, pois, por exemplo, $x=0$ não satisfaz o sistema de inequações .

40. O resultado da decomposição do polinómio x^3-9x-x^2+9 em factores é:

A: $(x+1)(x-1)(x-3)$ B: $(x+1)(x-2)(x+3)$ C: $(x-1)(x+3)(x-3)$
D: $(x-1)(x+1)(x+3)$ E: $(x+1)(x-3)(x+3)$

Resolução : Temos:

$$x^3-9x-x^2+9=x(x^2-9)-(x^2-9)=(x^2-9)(x-1)=(x-1)(x+3)(x-3).$$

A resposta certa é **C.**

- Note que substituindo $x=0$ no polinômio obtemos 9, contudo não obtemos este valor quando substituimos $x=0$ em nenhum dos polinômios das restantes alternativas.

Exame de Matemática I de 2022

Correcção do exame de Matemática I de 2022

1. O valor de $|-\sqrt{5}+2|$ corresponde a seguinte opção:

   A: $\sqrt{5}+2$ B: $\sqrt{7}$ C: $2/5$ D: $\sqrt{5}-2$ E: $|\sqrt{5}|+|2|$

   Resolução: Temos: $\sqrt{5} > 2$, então $-\sqrt{5}+2 < 0$. Utilizando a definição de módulo, $|-\sqrt{5}+2| = -(-\sqrt{5}+2) = \sqrt{5}-2$. A resposta certa é **D**.

2. Qual é a solução da equação $\left|\frac{4}{x-1}\right| = 2$?

   A: -4 B: 2 C: 3 e -5 D: -1 e 3 E: 4

   Resolução : Temos:

$$\left|\frac{4}{x-1}\right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{x-1} = 2, & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -\frac{4}{x-1} = 2, & \text{se } x-1 < 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 4 = 2(x-1), & \text{se } x \geq 1 \\ -4 = 2(x-1), & \text{se } x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, & \text{se } x \geq -2 \\ x = -1, & \text{se } x < -2. \end{cases}$$

   A resposta certa é **D**.

   - Note que as restantes alternativas não satisfazem a equação .

3. Qual é o conjunto que representa a solução de $|x-2| \geq 3$?

   A: $x \leq -1 \vee x \geq 5$ B: $x = 5$ C: $x \leq -5 \vee x \geq 1$
   D: $-5 \leq x \leq 5$ E: $-1 \leq x \leq 5$

   Resolução : Temos:

$$|x-2| \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 3, & \text{se } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) \geq 3, & \text{se } x-2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 5, & \text{se } x \geq 2 \\ x-2 \leq -3, & \text{se } x < 2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 5, & \text{se } x-2 \geq 0 \\ x \leq -1, & \text{se } x < 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq 5 \vee x \leq -1.$$

   A resposta certa é **A**.

4. Tendo em conta a relação $-|x| < x$ é correcto afirmar que:

   A. $\mathbb{R}$ B. $x = 0$ C. $x < 0$ D. $x > 0$ E. $\emptyset$

Resolução : Tendo em conta definição de módulo,

$$-|x|<x \Leftrightarrow \begin{cases} -x<x, & \text{se } x>0 \\ -(-x)<x, & \text{se } x\leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x<0, & \text{se } x>0 \\ x<x, & \text{se } x\leq 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x>0, & \text{se } x>0 \\ 0<0(\text{ impossível }), & \text{se } x\leq 0 \end{cases}$$

A resposta certa é **D**.

- Note que as outras alternativas ou contém números que não fazem parte da solução ou não contém números que fazem parte da olução . Por exemplo, $x=-1$, $x=0$ não satisfazem a inequação.

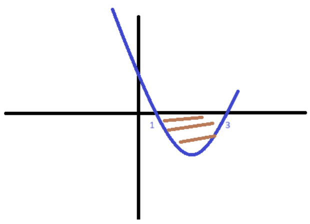
5. Qual é o conjunto de soluções da inequação $|x|^2-4|x|+3\leq 0$?

A: $\{1,3\}$ B: $[-3,-1]\cup[1,3]$ C: $[1,3]$
D: $]-\infty,-1[\cup]3,\infty[$ E: $[-1,3]$

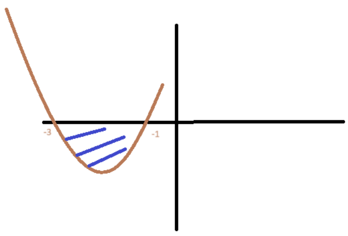
Resolução : Temos:

$$|x|^2-4|x|+3\leq 0 \Leftrightarrow x^2-4|x|+3\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3\leq 0, & \text{se } x\geq 0 \\ x^2+4x+3\leq 0, & \text{se } x<0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x-3)\leq 0, & \text{se } x\geq 0 \\ (x+1)(x+3)\leq 0, & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Resolvendo graficamente, temos para $x\geq 0$:



Para $x<0$, temos:



Assim, a solução é $[-3,-1]\cup[1,3]$.

- Note que as outras alternativas ou contém números que não fazem parte da solução ou não contém números que fazem parte da solução . Por exemplo, $x=0$, $x=4$ não satisfazem a inequação, e $x=-3$ satisfaz a inequação mas não percence aos conjuntos das alternativas A e C.

6. Um jogador utiliza um dado não equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6. A probabilidade de obter 4 das faces é dada pela tabela abaixo. Qual é a probabilidade de obter um número par?

Número	1	2	3	4	5	6
Probabilidade	0,1	?	0,1	0,15	0,15	?

A: 1 B: $3/10$ C: $0,35$ D: $1/2$ E: $0,65$

Resolução : Seja E o evento "saida de número par". Temos:

$$P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - (P(E1) + P(E3) + P(E5)) = 1 - (0,1 + 0,1 + 0,15) = 1 - 0,35 = 0,65.$$

A resposta certa é **E**.

7. A Inocência selecciona aleatoriamente uma variante de um trabalho individual a partir de 40 variantes diferentes, numeradas de 1 a 40. Qual é a probabilidade do número da variante da Inocência ser ímpar e menor que 12?

A: $1/8$ B: $11/40$ C: $3/20$ D: $1/4$ E: $3/10$

Resolução : Seja E o evento "saida do número ímpar e menor que 12". Tendo em conta que os números ímpares e menores que 12 são 1,3,5,7,9 e 11, teremos:

$$P(E) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{6}{40} = 3/20.$$

A resposta certa é **C**.

8. Quantos jogos m de um campeonato de xadrez devem ser realizados num torneio com 20 pessoas e qual é a probabilidade p de uma pessoa ser a vencedora dessa prova?

A: $m = 10,\ p = 1/10$ B: $m = 190,\ p = 1/20$ C: $m = 400,\ p = 1/40$
D: $m = 200,\ p = 1/20$ E: $m = 120,\ p = 1/40$

Resolução : Assumindo que o campeonato é todos contra todos, no final vence o que tiver a melhor classificação e que todos participantes tem igual chance de ganhar, teremos:

$$m = C_2^{20} = \frac{20!}{2! \cdot (20-2)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{2 \cdot 18!} = 190$$

$$p = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{1}{20}.$$

A resposta certa é **B**.

9. Os 18 participantes de uma festa são divididos em 2 grupos de 11 e 7 pessoas. O número de modos desta divisão é:

A: $\frac{18!}{11! \cdot 7!}$ B: $\frac{18!}{11!} + \frac{18!}{7!}$ C: $\frac{18!18!}{7! \cdot 11!}$ D: $11!7!2!$ E: $\frac{18!}{11!} \cdot 7$

Resolução : Para o número de grupos de 11 pessoas e 7 pessoas num total de 18 pessoas fazemos:

$$C_{11}^{18} \cdot C_7^7,$$

pois, depois de agruparmos 11 pesssoas das 18, restam 7 pessoas que devemos também agrupá-las em 7 elementos. Obtemos:

$$C_{11}^{18} \cdot C_7^7 = \frac{18!}{11!(18-11)!} \cdot \frac{7!}{7!(7-7)!} = \frac{18!}{11!7!}.$$

A resposta certa é **A**.

- Note que uma possibilidade de obter $\frac{18!}{\cdot 7!} + \frac{18!}{\cdot 7!}$ é $A_{11}^{18} + A_7^{18}$, onde A_p^n significa arranjo de n elementos tomados p a p. Se for o caso, corresponde ao total de agrupamentos de 7 ou de 11 que podemos ter de 18 elementos em que trocando a ordem dos mesmos é considerado um caso novo. Esta alternativa não está certa pois o mesmo grupo de pessoas é contado mais de uma vez.

- Note que uma possibilidade de obter $\frac{18!18!}{11!7!}$ é $A_{11}^{18} \cdot A_{7}^{18}$, onde A_p^n significa arranjo de n elementos tomados p a p. Se for o caso, corresponde ao total de agrupamentos de 7 e de 11 que podemos ter de 18 elementos em que trocando a ordem dos mesmos é considerado um caso novo. Esta alternativa não está certa pois o mesmo grupo de pessoas é contado mais de uma vez.
- Note que uma possibilidade de obter 11!7!2! é $P_{11}P_7P_2$, onde P_n significa permutação de n elementos. Se for o caso, corresponde ao total de permutações de dois blocos de 7 e 11 elementos, respectivaente, sendo que dentro destes blocos os elementos permutam entre si. Esta alternativa não está certa pois o mesmo grupo de pessoas é contado mais de uma vez.
- Note que uma possibilidade de obter $\frac{18!}{11!} \cdot 7$ é $A_{11}^{18} \cdot 7$, onde A_p^n significa arranjo de n elementos tomados p a p. Se for o caso, corresponde ao total de agrupamentos de 12 que podemos ter de 18 elementos em que trocando a ordem dos mesmos é considerado um caso novo, dos quais, um de 7 possíveis elementos deve fazer parte do grupo. Esta alternativa não está certa pois o mesmo grupo de pessoas é contado mais de uma vez.

10. A família do Carlos é formada por 5 pessoas: ele, a sua esposa e 3 filhos. Indique o número de possibilidades dos membros da família se organizarem para tirar uma foto, sendo que o Carlos e a esposa pretendem ficar lado-a-lado.

A: 120 B: 15 C: 98 D: 24 E: 48

Resolução: Atendendo ao facto de que se duas pessoas trocam de posição na foto, temos uma nova forma de organização , então estamos perante a uma permutação de 5 elementos. No entanto, dois deles devem estar juntos. Assim, consideramos estes dois como se fosse uma pessoa. Teremos P_4. Mas estas pessoas podem permutar entre si, P_2. Multiplicamos estas possibilidades e obtemos $P_4 \cdot P_2 = 4! \cdot 2! = 24 \cdot 2 = 48$.

A resposta certa é E.

11. O coeficiente de x^2 no desenvolvimento do binómio $(2x-3)^5$ é igual a:

A: 1080 B: 540 C: -10 D: -540 E: -1080

Resolução : Usando o binómio de Newton, temos:

$$(a+b)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_k^5 a^{5-k} b^k.$$

Fazendo $a = 2x$ e $b = -3$, o termo corresponde a x^2 obtém-se quando $k = 3$. O correspondente termo é

$$C_3^5 \cdot (2x)^2(-3)^3 = \frac{5!}{3!2!} 4x^2(-27) = 10 \cdot (-27) \cdot 4x^2 = -1080x^2.$$

Assim, o coeficiente de x^2 é -1080. A resposta certa é **E**.

12. A soma dos três primeiros elementos de uma certa linha do triângulo de Pascal é 121. Qual é o terceiro elemento da linha seguinte?

A: 3 B: 84 C: 120 D: 124 E: 232

Resolução: Usando o binómio de Newton, temos:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^{n-k} b^k.$$

Cada linha do triângulo de Pascal corresponde aos coeficientes binomiais C_k^n para o desenvolvimento de $(a+b)^n$. Assim, a soma dos primeiros três elementos da linha do triângulo de Pascal é:

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n = 121.$$

Vamos determnar n. Temos:

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n = 121 \Rightarrow 1 + n + \frac{n!}{2!(n-2)!} = 121$$
$$\Rightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 121 \Rightarrow 2 + 2n + n(n-1) = 242$$
$$\Rightarrow n^2 + n - 240 = 0 \Rightarrow (n+16)(n-15) = 0 \Rightarrow n = -16 \vee n = 15.$$

Visto que n é não negativo, $n = 15$. Assim, o terceiro elemento da linha seguinte é:

$$C_2^{n+1} = C_2^{16} = \frac{16!}{2!(16-2)!} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120.$$

A resposta certa é **C**.

13. Qual dos seguintes conjuntos descreve o domínio da função real de variável real $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{(2x-5)^2}$?

A: $]-5/2, 5/2[$ B: $]-\infty, 4[$ C: $]-\infty, 5/2[\cup]5/2, 4]$
D: $\mathbb{R} \setminus \{-5/2\}$ E: $\mathbb{R} \setminus \{5/2, 4\}$

Resolução : Tendo em conta o domínio da função $\sqrt{\cdot}$, temos:

$$4 - x \geq 0 \wedge (2x-5)^2 \neq 0 \Rightarrow -x \geq -4 \wedge 2x - 5 \neq 0 \ \Rightarrow x \leq 4 \wedge x \neq \frac{5}{2}.$$

A solução é $]-\infty, 5/2[\cup]5/2, 4]$. A resposta certa é **C**.

14. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções reais de variável real tais que $f(-x) = -f(x)$ e $g(x) = g(-x)$. **Indique a opção errada.**

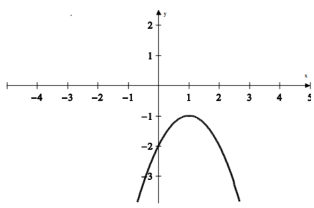
A: $f(0) = 0$
B: $f(x)$ é ímpar
C: $g(x)$ é par
D: O gráfco de $f(x)$ é simétrico em relação ao eixo das abcissas
E: O gráfico de $g(x)$ é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

Resolução : Temos:

- $f(0) = 0$ é verdade, pois, se $x = 0$ teremos $f(0) = -f(0)$, logo $2f(0) = 0$ de onde obtemos $f(0) = 0$.
- $f(x)$ é ímpar, é verdade, pois, satisfaz as condições de função ímpar.
- $g(x)$ é par, é verdade, pois, satisfaz as condições de função par.
- O gráfco de $f(x)$ é simétrico em relação ao eixo das abcissas. **Não está correcto.** Pois, isso implica $f(a) = \pm b$, o que contradiz com a definição de função.
- O gráfico de $g(x)$ é simétrico em relação ao eixo das ordenadas. É verdade, pois, se fixamos $x > 0$ obtemos um gráfico a direita do eixo OY e para $x < 0$, usando a propriedade $g(-x) = g(x)$ obtemos um reflexo do gráfico anterior em relação ao eixo OY.

A resposta certa é **D**.

15. A parábola cujo gráfico está representado na figura ao lado tem equação:



A: $y(x) = (x-1)^2 - 1$ B: $y(x) = (x-1)^2 + 1$ C: $y(x) = -(x-1)^2 + 1$
D: $y(x) = -(x-1)^2 - 1$ E: $y(x) = -(x+1)^2 - 1$

Resolução : A expressão analítica da parábola tem a forma $y(x) = a(x-x_v)^2 + y_v$, onde (x_v, y_v) são as coordenadas do vértice. Temos $x_v = 1,\ y_v = -1$ e a ordenada na origem é -2, ou seja, a parábola passa pelo ponto $(0, -2)$. Assim,

$$y(x) = a(x-x_v)^2 + y_v \Rightarrow y(x) = a(x-1)^2 - 1$$
$$\Rightarrow -2 = a(0-1)^2 - 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow y(x) = -(x-1)^2 - 1$$

A resposta certa é **D**.

- Note que as expressões analíticas dadas nas restantes alternativas ou não passam do ponto (0,-2) ou não tem o vértice em (1,-1).

16. Quais os valores que α deve assumir para que a função $f(x) = \alpha x^2 - (2\alpha - 2)x + \alpha - 1,\ \alpha \in \mathbb{R}$, tenha 2 zeros distintos?

A: $\alpha < 1,\ \alpha \neq 0$ B: $\alpha > 0$ C: $-1 < \alpha < 1$ D: $\alpha > 1/4$ E: $\alpha = 1$

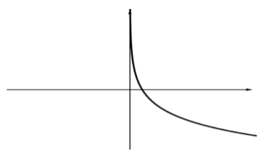
Resolução : Vamos supor que $\alpha \neq 0$ pois caso contrário $f(x)$ torna-se função linear. Para que uma função quadrática tenha dois zeros distintos é necessário e suficiente que o descriminante seja estritamente positivo, ou seja,

$$\Delta = (2\alpha - 2)^2 - 4 \cdot \alpha \cdot (\alpha - 1) > 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 - 4\alpha^2 + 4\alpha > 0$$
$$\Leftrightarrow -4\alpha + 4 > 0 \Leftrightarrow \alpha < 1,\ \alpha \neq 0.$$

A resposta certa é **A**.

- Note que as outras alternativas ou contém números que não fazem parte da solução ou não contém números que fazem parte da solução. Por exemplo, $\alpha = 1$ implica $f(x) = x^2$ que tem um zero com multiplicidade dois, $\alpha = 2$ implica $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$ que não tem zeros em $\mathbb{R}$ e $\alpha = -2$ implica $f(x) = -2x^2 + 6x - 3$ que tem dois zeros distintos.

17. Qual é a função cujo gráfico está representado na figura ao lado?



A: $f(x) = a^x$ com $a > 1$
B: $f(x) = a^x$ com $0 < a < 1$
C: $f(x) = 1/x$ com $x > 0$
D: $f(x) = \log_a^x$ com $0 < a < 1$
E: $f(x) = \log_a^x$ com $a > 1$

Resolução : Temos:

- $f(x) = a^x$ com $a > 1$ é uma função tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Mas isto está em contradição com o gráfico apresentado que tende para menos infinito quando x tende para o infinito. Esta alternativa não é correcta.

- $f(x) = a^x$ com $0 < a < 1$ é uma função tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Mas isto está em contradição com o gráfico apresentado que tende para menos infinito quando x tende para o infinito. Esta alternativa não é correcta.
- $f(x) = 1/x$ com $x > 0$ é uma função tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Mas isto está em contradição com o gráfico apresentado que tende para menos infinito quando x tende para o infinito. Esta alternativa não é correcta.
- $f(x) = \log_a^x$ com $0 < a < 1$ é uma função tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, é decrescente, zero da função é $x = 1$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Estas propriedades correspondem com o gráfico apresentado. **Esta alternativa é correcta.**
- $f(x) = \log_a^x$ com $a > 1$ é uma função tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Mas isto está em contradição com o gráfico apresentado que tende para menos infinito quando x tende para o infinito. Esta alternativa não é correcta.

A resposta certa é **D**.

18. Qual das seguintes funções é crescente em todo o seu domínio?

A: $f(x) = \sin(x-\pi)$ B: $f(x) = (\frac{2}{5})^x$ C: $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$
D: $f(x) = -\log_{10}^{(x-5)}$ E: $f(x) = e^{\ln(x+2)}$

Resolução : Temos:

- $f(x) = \sin(x-\pi)$ é uma função periódica, não constante, logo não é crescente em todo seu domínio. Esta alternativa não é correcta.
- $f(x) = (\frac{2}{5})^x$ é uma função decrescente e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Esta alternativa não é correcta.
- o gráfico correspondente à função $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$ é uma parábola, e consequentemente, não é crescente em todo seu domínio. Esta alternativa não é correcta.
- $f(x) = -\log_{10}^{x-5}$ não é crescente, pois, $f(6) = 0$ e $f(15) = -1$. Esta alternativa não é correcta.
- $f(x) = e^{\ln(x+2)} = x + 2$, que tem domínio $x + 2 > 0$ ou seja, $x > -2$. Neste conjunto, a função $f(x) = x + 2$ é uma recta crescente. **Esta alternativa é correcta**

A resposta certa é **E**.

19. Considere as sucessões de termos gerais $u_n = 2 - \frac{n-1}{10}$, $v_n = -4n^2 + 9$ e $w_n = \frac{1}{2n}$. Quais das sucessões são crescentes?

A: u_n e v_n B: u_n e w_n C: v_n e w_n
D: u_n , v_n e w_n E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Temos:

$$u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{n}{10} - \left(2 - \frac{n-1}{10}\right) = -\frac{n}{10} + \frac{n-1}{10} = -\frac{1}{10} < 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Então, u_n é decrescente. Para v_n temos:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= -4(n+1)^2 + 9 - (-4n^2 + 9) = 4n^2 - 4(n+1)^2 \\ &= 4(n-n-1)(n+n+1) = -4(2n+1) < 0, \ n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Então, v_n é decrescente. Para w_n temos:

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} = \frac{n-(n+1)}{2n(n+1)} = -\frac{1}{2n(n+1)} < 0, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Então, w_n é decrescente. Nenhuma das sucessões dadas é crescente. A resposta certa é **E**.

20. Os três primeiros termos de uma progressão aritmética são $a_1 = 1+x$, $a_2 = 6x$ e $a_3 = 2x^2+4$. Determine os seus valores.

A: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$
B: $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = 3$, $a_3 = \frac{9}{2}$ ou $a_1 = 6$, $a_2 = 30$, $a_3 = 54$
C: $a_1 = \frac{6}{5}$, $a_2 = \frac{36}{25}$, $a_3 = \frac{216}{125}$
D: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{3}{2}$
E: $a_1 = -1$, $a_2 = -12$, $a_3 = -23$ ou $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = 9$, $a_3 = \frac{33}{9}$

Resolução : Temos:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \Rightarrow 6x - (1+x) = 2x^2 + 4 - 6x \ \Rightarrow 2x^2 - 11x + 5 = 0$$
$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} \ \Rightarrow x_{1,2} = \frac{11 \pm 9}{4} \Rightarrow x_1 = 5, \ x_2 = \frac{1}{2}.$$

Substituindo estes valores nas expressões de a_1, a_2 e a_3, obtemos:

$$a_1 = \frac{3}{2}, \ a_2 = 3, \ a_3 = \frac{9}{2} \text{ ou } a_1 = 6, \ a_2 = 30, \ a_3 = 54.$$

A resposta certa é **B**.

- Nas alternativas A, C e D não é possível encontrar um valor de x que corresponde aos valores de a_1, a_2 e a_3.
- Note que a_3 é positivo, portanto a alternativa E está errada.

21. Na progressão 1, 3, 9, 27, 81,... a soma dos n primeiros termos é 364. Qual é o valor de n?

A: 6 B: 72 C: 4 D: 16 E: 7

Resolução : Temos $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$, $n = 1, 2, \ldots$ Assim, a_n é uma progressão geométrica de razão $q = 3$. O termo geral é $a_n = a_1 q^{n-1} = 1 \cdot 3^{n-1}$. A soma dos primeiros n termos é: $s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$. Assim,

$$s_n = \frac{1-3^n}{1-3} \Rightarrow 364 = \frac{1-3^n}{-2} \ \ -728 = 1 - 3^n \Rightarrow 3^n = 3^6 \Rightarrow n = 6.$$

A resposta certa é **A**.

- Note que somando os primeiros 4 ou 7 termos não obtemos 364. Para $n = 7$ obtemos a soma dos primeiros 7 termos é maior que 364. Visto que a sucessão é crescente e positiva, a soma dos primeiros 16 ou 72 termos é muito superior a 364.

22. Qual é o número de termos de uma progressão geométrica onde $a_1 = \frac{1}{32}$, $a_n = 2$, e a razão $r = 2$.

A: 1/8 B: 7 C: 6 D: 1/2 E: 16

Resolução : O termo geral é:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow 2 = \frac{1}{32} \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 64 = 2^{n-1} \ \Rightarrow 2^6 = 2^{n-1} \Rightarrow n - 1 = 6 \Rightarrow n = 7.$$

A resposta certa é **B**.

- Note que n é um número natural. Logo 1/8 e 1/2 não estão correctos.
- Substituindo $n = 6$ ou $n = 16$ no termo geral não obtemos 2.

23. Os termos de uma progressão geométrica entre $a_1 = 36$ e $a_7 = \frac{4}{81}$ são:

A: 36, 12, 4, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{27}$, $\frac{4}{81}$, B: 36, 12, 6, $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{18}$, $\frac{4}{27}$, $\frac{4}{81}$ C: 12, 4, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{27}$
D: 36, 12, 3, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{27}$, $\frac{4}{81}$ E: 36, 12, 4, 2, $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{27}$, $\frac{4}{81}$

Resolução : Temos:

$$a_m = a_n q^{m-k} \Rightarrow a_7 = a_1 q^6 \Rightarrow \frac{4}{81 \cdot 36} = q^6 \Rightarrow \frac{1}{3^6} = q^6 \Rightarrow q = \pm\frac{1}{3}.$$

Para $q = \frac{1}{3}$, teremos: 36, 12, 4, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{9}$ $\frac{4}{27}$, $\frac{4}{81}$ ou para $q = -\frac{1}{3}$, teremos: 36, -12, 4, $-\frac{4}{3}$, $\frac{4}{9}$ $-$ $\frac{4}{27}$, $\frac{4}{81}$. A resposta certa é **A**.

- As alternativas B e D não formam uma progressão geométrica. O primeiro termo na alternativa C é diferente de 36.

24. Determine o $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$?

A: $+\infty$ B: 1 C: 0 D: e^2 E: e

Resolução : Temos:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = 1^{\infty} \text{ é indeterminação .}$$

Aplicando o limite notável $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e.$$

A resposta certa é **E**.

25. Encontre o $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(9n^3+2n+1)^4}{(3n^2+7)^6}$, $n \in \mathbb{N}$.

A: 1/7 B: 3 C: 9 D: 0 E: 2/3

Resolução : Temos: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(9n^3+2n+1)^4}{(3n^2+7)^6} = \frac{\infty}{\infty}$ é indeterminação. Levantando a indeterminação, teremos:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{(9n^3+2n+1)^4}{(3n^2+7)^6} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(9n^3(1+\frac{2}{9n^2}+\frac{1}{9n^3}))^4}{(3n^2(1+\frac{1}{3n^2}))^6} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{9^4 n^{12}(1+\frac{2}{9n^2}+\frac{1}{9n^3})^4}{3^6 n^{12}(1+\frac{7}{3n^2})^6} = \frac{9^4}{3^6} = \frac{3^8}{3^6} = 3^2 = 9,\end{aligned}$$

pois, $\frac{1}{n^2} \to 0$, $\frac{1}{n^3} \to 0$ quando $n \to \infty$. A resposta certa é **C**.

26. Considere a função real $f(x) = 2^{-x}$. O valor da expressão $S = f(0) + f(1) + f(2) \ldots + f(100)$ é igual a:

A. $S = 2 - 2^{-101}$ B. $S = 2^{50} - 2^{-50}$ C. $S = 2 + 2^{-101}$
D. $S = 2 + 2^{-100}$ E. $S = 2 - 2^{-100}$

Resolução : Temos:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{100}}$$

Esta corresponde a soma dos primeiros termos duma progressão geométrica de razão:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = \frac{1}{2}.$$

Temos:

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{101})}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^{101}}\right) = 2\cdot\frac{(2^{101}-1)}{2\cdot 2^{100}} = 2-2^{-100}.$$

Assim, $S = 2-2^{-100}$. A resposta certa é **E**.

27. Indique o valor do $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^2-3x+2}$.

A. 0 B. 1 C. 2 D. $-\infty$ E. $+\infty$

Resolução : Temos $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0}$ é indeterminação. Assim,

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-1} = 0.$$

A resposta certa é **A**.

28. Calcule o limite, quando $x\to 8$ da função $\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

A. $+\infty$ B. 12 C. 4 D. 0 E. -8

Resolução : Temos:

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \frac{0}{0} \text{ é indeterminação }.$$

Tendo em conta que $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, teremos:

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}$$

$$= \lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{x-8} = \lim_{x\to 8}(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4) = 4+4+4 = 12.$$

A resposta certa é **B**.

29. Determine $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x-3}{3x^4+1}$:

A. 0 B. 4/3 C. -3 D. 1 E. $+\infty$

Resolução : Temos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x-3}{3x^4+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2(1+\frac{1}{2x}-\frac{3}{4x^2})}{3x^4(1+\frac{1}{3x^4})} = \lim_{x\to\infty}\frac{4(1+\frac{1}{2x}-\frac{3}{4x^2})}{3x^2(1+\frac{1}{3x^4})} = 0,$$

pois $1/x^2\to 0$, $1/x^4\to 0$, $1/x\to 0$ quando $x\to\infty$. A resposta certa é **A**.

30. Indique o limite, quando $x\to 0$, da função $\frac{x-\sin(3x)}{3x^2-\sin(5x)}$:

A: 0 B: 1/3 C: 2/5 D: 3/5 E: 1

Resolução : Temos $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin(3x)}{3x^2-\sin(5x)} = \frac{0}{0}$ é indeterminação. Usando o limite notável $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, temos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(3x)}{3x^2-\sin(5x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1-\frac{\sin(3x)}{x})}{x(3x-\frac{\sin(5x)}{x})} \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{3\sin(3x)}{3x}}{3x-\frac{5\sin(5x)}{5x}} = \frac{1-3}{-5} = \frac{2}{5}.$$

A resposta certa é **C**.

31. PASSE PARA A PERGUNTA SEGUINTE.

32. Qual o valor do parâmetro $\beta \in \mathbb{R}$ para o qual a função
$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{x}, & x > 0 \\ 5^x - \beta, & x \leq 0 \end{cases}$ é contínua em $\mathbb{R}$:

A: 0 B: 1 C: 2 D: -2 E: -3

Resolução : A condição de continuidade de $f(x)$ no ponto $x = x_0$ é:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Assim, claramente que f é contínua em $\mathbb{R}$ com excepção talvez do ponto $x = 0$, que é um ponto que suscita dúvida quanto à continuidade de $f(x)$. Vamos verificar as condições continuidade de f neste ponto, temos:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$
$$\lim_{x\to 0^-} (5^x - \beta) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(3x)}{x} \Rightarrow 1 - \beta = 3 \Rightarrow \beta = -2.$$

A resposta certa é **D**.

33. Indique qual a derivada de $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x}}$:

A: $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ B: $f'(x) = \frac{2x+1}{2x^{3/2}}$ C: $f'(x) = 4x^{1/2}$ D: $f'(x) = \frac{2\sqrt{x}}{(2x-1)^2}$ E: $f'(x) = -\frac{1}{x}$

Resolução : Temos:

$$f'(x) = \frac{(2x-1)'\sqrt{x} - (\sqrt{x})'(2x-1)}{(\sqrt{x})^2} = \frac{2\sqrt{x} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{4x-(2x-1)}{2x\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2x\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2x^{\frac{3}{2}}}.$$

A resposta certa é **B**.

34. Considere a função $f(x) = xe^{-x}$. Indique os seus intervalos de monotonia:

A: Crescente: $]-\infty, 1[$ e decrescente $]1, \infty[$;
B: Crescente: $\mathbb{R}$;
C: Decrescente: $\mathbb{R}$;
D: Crescente: $]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$ e decrescente $]0, 1[$;
E: Crescente: $[0, 1[$ e decrescente $]1, \infty[$.

Resolução : Usando as seguintes propriedades de derivada, temos:

$$f'(x) = x'e^{-x} + (e^{-x})'x = e^{-x} - xe^{-x}.$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(1-x) = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Estudando o sinal da primeira derivada, teremos:

x	$]-\infty, 1[$	1	$]1, \infty[$
$f'(x)$	$+$	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$

A resposta certa é **A**.

35. Seja a função $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Qual das seguintes afirmações é correcta?

A: $f(x)$ tem um mínimo e um máximo.
B: $f(x)$ tem um mínimo e não tem máximo.
C: $f(x)$ tem um máximo e não tem mínimo.
D: $f(x)$ é crescente na recta numérica.
E: $f(x)$ é decrescente na recta numérica

Resolução : Esstudando os extremos e montonia de f teremos:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \ \Rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Analisando o sinal da primeira derivada, teremos:

x	$]-\infty, -1[$	-1	$]-1, 1[$	1	$]1, \infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

Desta forma, a função $f(x)$ tem um máximo no ponto $(-1, 3)$ e um mínimo no ponto $(1, -1)$. A resposta certa é **A**.

36. A recta $y = 8x - 5$ é tangente ao gráfico da função $f(x)$ em $x = 1$. Determine a equação da recta tangente ao gráfico de $g(x) = f(x) - 2$ em $x = 1$.

A. $y = -5x + 8$ B. $y = 6x - 3$ C. $y = 8x - 7$ D. $y = 6x - 7$ E. $y = 8x + 2$

Resolução : A função $f(x)$ tem um ponto em comum no ponto de tangência, $x = 1$, $y = f(1) = 3$. Assim, $g(1) = f(1) - 2 = 1$ e a recta tangente à função $g(x)$ no ponto $x = 1$ é paralela à recta tangente à função $f(x)$ no ponto $x = 1$. Desta forma, o declive da recta tangente à função $g(x)$ no ponto $x = 1$ é $a = 8$. Assim, a equação desta recta é

$$y - y_0 = a(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = 8(x - 1) \Rightarrow y = 8x - 7.$$

A resposta certa é **C**.

- Note que equações de rectas dadas nas restantes alternativas não passam do ponto (1,1).

37. A que função corresponde o integral $\int x^2 \left(\frac{x^3}{3} + 2\right)^2 dx$

A. $F(x) = \left(\frac{x^3}{9} + 2\right)^3 + c,\ c \in \mathbb{R}$

B. $F(x) = \frac{x^3}{3}\left(\frac{x^4}{4} + 2\right)^2 + c,\ c \in \mathbb{R}$

C. $F(x) = \left(\frac{x^4}{4} + 2\right)^2 + c,\ c \in \mathbb{R}$

D. $F(x) = x^2\left(\frac{x^3}{3} + 2\right)^3 + c,\ c \in \mathbb{R}$

E. $F(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} + 2\right)^3 + c,\ c \in \mathbb{R}$

Resolução : Fazendo a substituição $t = \frac{x^3}{3} + 2$, temos: $dt = x^2 dx$. Assim,

$$\int x^2 \big(\frac{x^3}{3} + 2\big)^2 dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3} \cdot t^3 + c = \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} + 2\right)^3 + c,$$

onde c é uma constante arbritrária. A resposta certa é **E**.

- Note que a derivada das funções nas outras alternativas é diferente de $x^2\left(\frac{x^3}{3} + 2\right)^2$.

38. Determine a primitiva de $f(x) = \sin^2 x \cos x$:

A. $\frac{\sin^3(x)}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}$
B. $\frac{\sin^3(x)}{3}\frac{\cos^2(x)}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}$
C. $\frac{\sin^2(x)\cos^2(x)}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}$
D. $-2\cos(x)\sin(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$
E. $\sin^2(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$

Resolução : Temos:

$$\int f(x)dx = \int \sin^2 x \cos x dx.$$

Tendo em conta que a deriva de $\sin(x)$ é $\cos(x)$, fazemos a substituição $t = \sin(x)$, então $dt = \cos(x)dx$. Assim,

$$\int f(x)dx = \int \sin^2 x \cos x dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c = \frac{\sin^3(x)}{3} + c,$$

onde c é uma constante arbitrária. A resposta certa é **A**.

- Note que a derivada das funções nas outras alternativas é diferente de $f(x)$.

39. Uma das funções que cumprem a condição $f'(x) = 4x^3 + x^2$ é:

A. $f(x) = x^4 + x^3$ B. $f(x) = x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 4$ C. $f(x) = x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 3$
D. $f(x) = 4x^4 + x^3 + 4$ E. $f(x) = -4x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 4$

Resolução : Temos:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (4x^3 + x^2)dx = \frac{4x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + c,$$

onde c é contante arbitrária. A função $f(x) = x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 4$ corresponde a esta quando $c = 4$. A resposta é **B**.

- Note que a derivada das funções nas outras alternativas é diferente de $f(x)$.

40. Qual é o valor de $(3 - 4i)(2 - i)(i)$?

A: $5 - 11i$ B: $2 + 5i$ C: $6 - 11i$ D: $11 + 2i$ E: $5 - 2i$

Resolução : Tendo em conta que $i^2 = -1$, temos:

$$(3 - 4i)(2 - i)(i) = (6 - 3i - 8i - 4)i = (2 - 11i)i = 2i + 11.$$

A resposta certa é **D**.

Exame de Matemática II de 2022

Correcção do exame de Matemática II de 2022

1. Seja o conjunto dos números naturais $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$. A expressão falsa é:

   A. N é o conjunto infinito;
   B. N é o conjunto ordenado;
   C. $\forall n, p \in N$, $s = n + p$ em conjunto N define soma de números
   D. $\forall n, p \in N$, $r = n - p$ em conjunto N define diferença de números
   E. N contém o elemento mais pequeno

   Resolução: Temos:

   - N é o conjunto infinito. Sim, pela forma de representação .
   - N é o conjunto ordenado. Sim, pois para cada $m, k \in N$ ou $m \leq k$ ou $k > m$.
   - $\forall n, p \in N$, $s = n + p$ em conjunto N define soma de números. Sim, $s = n + p$ é uma operação bem definida e $s \in N$.
   - $\forall n, p \in N$, $r = n - p$ em conjunto N define diferença de números. Não. Existe um problema no caso $n < p$, pois $n - p \notin N$.
   - N contém o elemento mais pequeno. Sim, 1 é elemento mínimo deste conjunto.

   A resposta certa é **D**.

2. Três números $a = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{e}}$, $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$, onde $\pi \approx 3,14$ e $e \approx 2,72$ satisfazem a desigualdade dupla:

   A: $a < b < c$ B: $c < a < b$ C: $c < a > b$ D: $c < b < a$ E: $a < c < b$

   Resolução : Tendo em conta que a função $\sqrt{\cdot}$ é crescente, teremos:

   $$e < 3 < \pi \Rightarrow \sqrt{e} < \sqrt{3} < \sqrt{\pi} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow a < c < b.$$

   A resposta certa é **E**.

3. Um táxi andou 1500 metros com uma velocidade de 15 quilómetros por hora; depois 3 quilómetros durante 9 minutos e o resto do caminho com uma velocidade de 30 km/h durante meia hora. Então, a velocidade média de viagem em quilómetros por hora é:

   A: 41 B: 65/3 C: $30,5$ D: 26 E: 21

   Resolução : Temos: $s_1 = 1500m = 1,5km$, $v_1 = 15km/h$, $s_2 = 3km$, $t_2 = 9min = \frac{9}{60}h = 0,15h$, $v_3 = 30km/h$, $t_3 = 30min = \frac{30}{60}h = 0,5h$. Assim,

   $$v_1 = \frac{s_1}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{1,5km}{15km/h} = 0,1h.$$

$$s_3 = t_3 \cdot v_3 = 30km/h \cdot 0,5h = 15km.$$

Assim,

$$v_m = \frac{s_t}{t_t} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{1,5km + 3km + 15km}{0,1h + 0,15h + 0,5h} = 26km/h.$$

A resposta certa é **D**.

4. Qual é o aumento percentual da área de um círculo cujo raio R é aumentado por 50%?

   A. 50%; B. 100%; C. 125%; D. 150%; E. 200%;

   Resolução : Temos:

$$A_1 = \pi R^2 \Rightarrow A_2 = \pi(R + 0,5R)^2 = \pi \cdot 2,25R^2$$
$$\Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{\pi 2,25R^2}{\pi R^2} = 2,25 = (1 + 1,25).$$

   Então, o aumento é de 125%. A resposta certa é **C**.

5. Segundo o inquérito, numa turma de 25 alunos foi registado que 18 alunos praticam basquetebol e 20 alunos futebol. Quantos alunos praticam basquetebol e futebol?

   A: 2 B: 13 C: 38 D: 7 E: 19

   Resolução : Seja B "o conjunto de alunos da turma que jogam basquetbol" e F "o conjunto de alunos da turma que jogam futebol". Designemos por $\#(A)$ o número de elementos do conjunto A. Assumindo que cada aluno da turma joga pelo menos uma das modalidades basquetbol ou futebol, ou seja, $\#(B \cup F) = 25$. Assim,

$$\#(B \cup F) = \#(B) + \#(F) - \#(B \cap F) \Rightarrow 25 = 20 + 18 - \#(B \cap F) \ \Rightarrow \#(B \cap F) = 13.$$

   A resposta certa é **B**.

6. As possibilidades de eleger 3 representantes de uma turma que contém 20 alunos são de:

   A: 60 B: 4520 C: 8000 D: 800 E: 1140

   Resolução : Temos que formar grupos de 3 pessoas num total de 20 alunos. Assumindo que todos os representantes desempenham papel similar, ou seja, a ordem não interessa, temos:

$$C_3^{20} = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{3 \cdot 2 \cdot 17!} = 1140.$$

   A resposta certa é **E**.

7. O resultado da operação da negação da expressão lógica $(P \to Q) \wedge Q \vee R$ é:

   A: $\neg P$ B: $P \wedge R$ C: $\neg Q \wedge \neg R$ D: $\neg P \vee \neg Q$ E: $\neg R$

   Resolução : Usando leis de álgebra das proposições, temos:

$$\neg((P \to Q) \wedge Q \vee R) \Rightarrow \neg((\neg P \vee Q) \wedge Q \vee R)$$
$$\Rightarrow \neg((\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge Q) \vee R) \ \Rightarrow \neg(Q \vee R)$$
$$\Rightarrow \neg Q \wedge \neg R$$

   A resposta certa é a **C**.

- Usamos as propriedades $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$, $(P \vee Q) \wedge Q \Leftrightarrow Q$.

8. A probabilidade de ocasiões que num número aleatório de três algarismos todos sejam distintos, é de:

   A: $0,31$ B: $0,45$ C: $0,54$ D: $0,72$ E: $0,83$

   Resolução : Seja E o evento "saida de 3 dígitos difrentes em um número de 3 algarismos". Tendo em conta que 000, 056, 001 não tem 3 algarismos, temos: 9 possibilidades para escolher o primeiro dígito, depois de escolher este, retiramos da lista mas acrescentamos o dígito zero na lista e ficamos com 9 possibilidades para escolher o segundo dígito e de seguida retiramos este último dígito escolhido e ficamos com 8 possibilidades de escolha. O total de tais números de 3 algarismos com os 3 dígitos difrenetes é $9 \cdot 9 \cdot 8$. Assim,

$$P(E) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{9 \cdot 9 \cdot 8}{9 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{72}{100} = 0,72.$$

   A resposta certa é **D**.

9. O termo a_1 e a razão d duma progressão aritmética cujos termo são $a_{21} = 62$ e $a_{31} = 92$, são:

   A: $a_1 = 2,\ d = 5$ B: $a_1 = 2,\ d = 4$ C: $a_1 = 3,\ d = 3$
   D: $a_1 = 2,\ d = 3$ E: $a_1 = 3,\ d = 2$

   Resolução : Temos $a_m = a_k + (m-k)d,\ m, k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$a_{31} = a_{21} + 10d \Rightarrow 92 = 62 + 10d \Rightarrow d = 3$$
$$a_{21} = a_1 + 20d \Rightarrow 62 = a_1 + 20 \cdot 3 \Rightarrow a_1 = 2.$$

   A resposta certa é **D**.

   - Note que o termo geral de uma progressão aritmétrica é $a_n = a_1 + d(n-1)$ e substituindo o primeiro termo e a razão dadas nas restantes alternnativas, não obtemos simultaneamente $a_{21} = 62$ e $a_{31} = 92$.

10. A soma se todos os números da sucessão numérica 5; 1; 0,2; 0,04;... é igual a:

    A: 5 B: $5,75$ C: $6,25$ D: 7 E: ∞

    Resolução: Temos: $\frac{1}{5} = \frac{0,2}{1} = \frac{0,04}{0,2} = 0,2$ ou seja, esta corresposnde a soma infinita dos termos de uma progressão geométrica de razão $q = 0,2$ e $a_1 = 5$. A soma dos primeiros n termos é:

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{5 \cdot (1-(0,2)^n)}{1-0,2} = 6,25(1-(0,2)^n).$$

    Assim, quando o número de termos a somar é infinitamente grande, calcuamos o limite de s_n quando $n \to \infty$. Temos:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} 6,25(1-(0,2)^n) = 6,25,$$

    pois, $(0,2)^n \to 0$ quando $n \to \infty$. A resposta certa é **C**.

    - Note que a soma infita dos termos de uma progressão geométrica é um número finito quando $|q| < 1$.
    - A soma é maior que 6, pois, todos os termos são não negativos e os dois pimeiros são 5 e 1 que a soma é 6.

11. Um viajante andou numa planície 6 quilómetros na direcção de Norte e depois 8 quilómetros na direcção de Leste. A distância recta entre o ponto inicial e o ponto final da viajem é igual a:

    A: 14km B: 10km C: 8km D: 6km E: 2km

    Resolução : Assumindo que o percurso na direcção norte e na direcção leste formam um ângulo de $90°$, a distância pretendida corresponde à hipotenusa de um triângulo rectângulo. Temos:

$$d^2 = (6km)^2 + (8km)^2 \Rightarrow d^2 = 36km^2 + 64km^2 = 100km^2$$
$$d = \sqrt{100km^2} = 10km.$$

    A resposta certa é **B**.

12. O módulo do vector $\vec{AB}$ cujos pontos inicial e final são $A(1,3,0)$, $B(4,7,2\sqrt{6})$ é igual a:

    A: $15+2\sqrt{6}$ B: $8+2\sqrt{6}$ C: 5 D: 7 E: 8

    Resolução: Temos:

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (4-1, 7-3, 2\sqrt{6}) = (3,4,2\sqrt{6}) \\ |\vec{AB}| &= \sqrt{3^2+4^2+(2\sqrt{6})^2} = \sqrt{9+16+24} = \sqrt{49} = 7. \end{aligned}$$

    A resposta certa é **D**.

13. A função $h(x) = x^2 - 5|x| + 1$ definida em $\mathbb{R}$ é:

    A: ímpar B: par C: não é par, nem ímpar
    D: par para $x > 0$ E: ímpar para $x < 0$

    Resolução : Temos:

$$f(-x) = (-x)^2 - 5|-x| + 1 = x^2 - 5|x| + 1 = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

    Então, $f(x)$ é par. A resposta certa é **B**.

14. O preço dum produto de uma fábrica varia diariamente, segundo a função , $q(t) = at^2 + b$ (t dias). Sendo o preço inicial 30,00Mt por unidade e depois de três dias 21,00Mt, qual será o preço de uma unidade do produto passando mais dois dias?

    A: 15 B: 12 C: 10 D: 7 E: 5

    Resolução : Temos:

$$q(0) = b = 30,\ q(3) = a\cdot 3^2 + b \Rightarrow 21 = 9a + 30 \Rightarrow a = -1.$$

    Assim, $q(t) = -t^2 + 30$ e $q(5) = -5^2 + 30 = 5$. A resposta certa é **E**.

15. A função inversa $y = f^{-1}(x)$ da função $f(x) = \sqrt{x-1}$ é:

    A: $y(x) = -x^2 + 1$ B: $y(x) = -x^2 - 1$ C: $y(x) = x^2 - 1$
    D: $y(x) = x^2 + 1$ E: não existe

    Resolução : Temos:

$$x = \sqrt{y-1} \Rightarrow x^2 = y - 1 \Rightarrow y = x^2 + 1.$$

    A resposta certa é **D**.

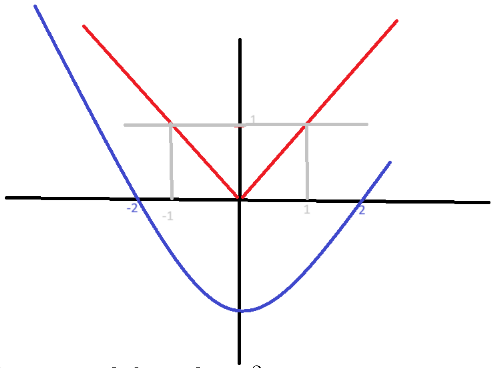
16. O domínio de definição da função $f(x) = \frac{\log_2^{|x|-1}}{\sqrt{4-x^2}}$ é:

A: $\emptyset$ B: $x \in]-1,1]$ C: $x \in]-2,-1[\cup]1,2[$
D: $x \in [-2,2]$ E: $x \in \mathbb{R}$

Resolução : Tendo em conta o domímio de logarítmo, de fracção e da função $\sqrt{\cdot}$, temos:

$$|x|-1>0 \wedge 4-x^2>0 \Rightarrow |x|>1 \wedge x^2-4<0.$$

Graficamente temos:



Então, $|x|>1$ implica $x \in]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$ e $x^2-4<0$ implica $x \in]-2,2[$. Intersectando estes dois conjuntos, obtemos: $\{x \in]-2,-1[\cup]1,2[\}$. A resposta certa é **C**.

17. PASSE PARA A PERGUNTA SEGUINTE.

18. A lei de movimento de um ponto material sob a acção do seu próprio peso no campo de gravidade da Terra (o problema do pêndulo matemático) define-se pela função $S(t) = s_0 \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$, onde s_0 e l são os parâmetros geomêtrcos do peêndulo, g é aceleração da força de gravidade, t é o tempo. Determine o período T de oscilações harmónicas de pêndulo.

A: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ B: $T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$ C: $T = \frac{2\pi}{s_0}$ D: $T = 2\pi$ E: $T = 2\pi gl$

Resolução : Seja T o período. Tendo em consideração que o periodo de função $\sin(t)$ é 2π, teremos:

$$\forall t,\ S(t+T) = S(t) \Rightarrow s_0 \sin\left((t+T)\sqrt{\frac{g}{l}}\right) = s_0 \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$$
$$T \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} = 2\pi \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

A resposta certa é **A**.

19. O valor de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(4x^2)}{\tan(9x^2)}$ é igual a:

A: $\frac{9}{4}$ B: $\frac{4}{9}$ C: $\frac{2}{3}$ D: $\frac{3}{2}$ E: 1

Resolução : Usando o limite notável

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

teremos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x^2)}{\tan(9x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^2\sin(4x^2)}{4x^2\tan(9x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^2}{\tan(9x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{4\cdot 9x^2\cos(9x^2)}{9\sin(9x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\cos(9x^2)}{9} = \frac{4}{9}.$$

A resposta certa é **B**.

20. Para que a função $f(x) = \begin{cases} -x^2+x+1, & x \in]-\infty, 0] \\ e^{x-b}, & x \in]0, \infty[\end{cases}$ seja contínua no ponto $x = 0$, parâmetro b deve ser igual a:

A: -1 B: 0 C: 1 D: 2 E: $\forall b \in \mathbb{R}$

Resolução :A condição de continuidade de $f(x)$ no ponto $x = x_0$ é:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Assim, claramente que f é contínua em $\mathbb{R}$ com excepção talvez do ponto $x = 0$, que é um ponto que suscita dúvida quanto à continuidade de $f(x)$. Vamos verificar as condições continuidade de f neste ponto, temos:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$
$$\lim_{x\to 0^-}(-x^2+x+1) = \lim_{x\to 0^+} e^{x-b} = 1$$
$$1 = e^{-b} \Rightarrow e^0 = e^{-b} \Rightarrow -b = 0 \Rightarrow b = 0.$$

A resposta certa é **B**.

21. A soma das raízes da equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ é igual a :

A: 0 B: 10 C: -5 D: 7 E: 13

Resolução : Fazendo $t = x^2$ teremos:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 13t + 36 = 0 \Rightarrow (t-9)(t-4) = 0$$
$$t_1 = 9 \wedge t_2 = 4$$
$$t_1 = x^2 \Rightarrow 9 = x^2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 3$$
$$t_2 = x^2 \Rightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 2.$$

A soma das raízes é igual a zero. A resposta certa é **A**.

22. Simplificando a expressão $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ obtém-se a expressão:

A: $\frac{2}{\sin\alpha}$ B: $\frac{1}{2}\sin\alpha$ C: $\frac{1}{2}\cos^2\alpha$ D: 2 E: $\frac{1}{2}$

Resolução : Temos:

$$\begin{aligned} \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} &= \frac{\sin^2\alpha + (1+\cos\alpha)^2}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha} \\ &= \frac{\sin^2\alpha + 1 + 2\cos\alpha + \sin^2\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha} = \frac{2+2\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}. \end{aligned}$$

A resposta certa é **A**.

- Note que se substituirmos $\alpha = \frac{\pi}{4}$ em $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$, obtemos $2\sqrt{2}$ no entanto, nas outras alternativas não obtemos este valor.

23. Quantos pontos de intersecção (k) têm os gráficos de funções $y = \sin x$ e $g(x) = |\sin 2x|$ no intervalo $[0, \pi]$?

A: $k = 4$ B: $k = 3$ C: $k = 2$ D: $k = 1$ E: $k = 0$

Resolução : Temos:

$$\sin x = |\sin 2x| \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \sin 2x, \text{ se } \sin(2x) \geq 0 \\ \sin x = -\sin 2x, \text{ se } \sin(2x) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 2\sin x \cos x, \text{ se } \sin(2x) \geq 0 \\ \sin x = -2\sin x \cos x, \text{ se } \sin(2x) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x(1 - 2\cos x) = 0, \text{ se } x \in [0, \pi/2] \\ \sin x(1 + 2\cos x) = 0, \text{ se } x \in]\pi/2, \pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2}, \text{ se } x \in [0, \pi/2] \\ \sin x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2}, \text{ se } x \in]\pi/2, \pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = \frac{\pi}{3}, \text{ se } x \in [0, \pi/2] \\ \\ x = \pi \vee x = \frac{2\pi}{3}, \text{ se } x \in]\pi/2, \pi] \end{cases}$$

A resposta certa é **A**.

24. Resolvendo a equação $\log_x^{(2x-1)} = -1$ a resposta é:

A: $x = -0,5$ B: $x = 1$ C: $x = 2$ D: $x = 0,5$ E: $\emptyset$

Resolução : Tendo em conta o domínio de logarítmo temos: $x > 0$, $x \neq 1$ e $2x - 1 > 0$. Assim,

$$\log_x^{(2x-1)} = -1 \Rightarrow x^{-1} = 2x - 1 \Rightarrow 1 = 2x^2 - x$$
$$\Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$$
$$\Rightarrow (x + \frac{1}{2})(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 1.$$

Visto que $x > 0$ e $x \neq 1$, então, esta equação não tem solução em $\mathbb{R}$. A resposta certa é **E**.

25. A solução da inequação $\frac{x^2-1}{x-5} \geq 0$ é o intervalo:

A: $\mathbb{R}$ B: $[1, 5[$ C: $[-1, 1] \cup]5, \infty[$ D: $]-\infty, -1]$ E: $\mathbb{R} \setminus \{5\}$

Resolução : Tendo em conta que $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, teremos:

x	$]-\infty, -1[$	-1	$]-1, 1[$	1	$]1, 5[$	$]5, +\infty$
$x + 1$	-	0	+	2	+	+
$x - 1$	-	-2	-	0	+	+
$x - 5$	-	-6	-	-4	-	+
$\frac{(x-1)(x+1)}{x-5}$	-	0	+	0	-	+

Assim, $\frac{(x-1)(x+1)}{x-5} \geq 0$, implica $x \in [-1, 1] \cup]5, \infty[$. A resposta certa é **C**.

- Note que as outras alternativas ou incluem valores que não satisfazem a inequação ou exluem valores que satisfazem a inequação.

26. Resolvendo a inequação $\sqrt{4 - 3x} \leq \sqrt{7x + 2}$ a resposta é o intervalo:.

A: $x \in]-\infty, -\frac{2}{7}[$ B: $]-\frac{2}{7}, 0[$ C: $x \in [\frac{1}{5}, \frac{4}{3}]$ D: $x \in [\frac{5}{3}, \frac{11}{3}]$ E: $x \in [\frac{11}{3}, \infty[$

Resolução : Temos:

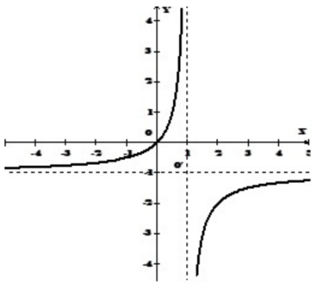
$$4 - 3x \geq 0, \ 7x + 2 \geq 0, \ (\sqrt{4 - 3x})^2 \leq (\sqrt{7x + 2})^2$$

$$-3x \geq -4,\ 7x \geq -2,\ |4-3x| \leq |7x+2|$$
$$x \leq \frac{4}{3},\ x \geq -\frac{7}{2},\ |4-3x| \leq |7x+2|$$
$$x \leq \frac{4}{3},\ x \geq -\frac{7}{2},\ 4-3x \leq 7x+2$$
$$x \leq \frac{4}{3},\ x \geq -\frac{7}{2},\ -10x \leq -2\ \Rightarrow x \leq \frac{4}{3},\ x \geq -\frac{7}{2},\ x \geq \frac{1}{5}.$$

Intersectando estes conjuntos, obtemos: $x \in [\frac{1}{5}, \frac{4}{3}]$. A resposta certa é **C**.

- Note que as outras alternativas incluem valores que não satisfazem a inequação. Por exemplo, $x = \frac{11}{3}$ não pertence ao domínio de existência de $\sqrt{4-3x}$.

27. A curva, cujo gráfico está representado na figura, tem a seguinte equação:



A. $y(x) = \frac{2-x}{x-1}$ B. $y(x) = \frac{-x}{x+1}$ C. $y(x) = \frac{x+2}{x+1}$ D. $y(x) = \frac{2-x}{1-x}$ E. $y(x) = \frac{x}{1-x}$

Resolução : Assumimos que a expressão analítica da função tem a forma:

$$y(x) = \frac{Ax+B}{Cx+D},$$

onde A, B, C, D são constantes, $C \neq 0$.

Temos,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{Ax+B}{Cx+D} = \frac{A}{C} = -1.$$

Assim, $A = -C$. A recta $x = 1$ é assímptota vertical, logo $-\frac{D}{C} = 1$. Desta forma $D = -C$ e

$$y(x) = \frac{-Cx+B}{Cx-C} = \frac{-x+\frac{B}{C}}{x-1}.$$

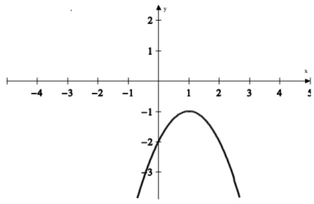
Tendo em conta que o gráfico passa pela origem, temos:

$$y(0) = 0 \Rightarrow \frac{B}{C} = 0 \Rightarrow B = 0.$$

Assim, $y(x) = -\frac{x}{x-1}$. A resposta certa é **B**.

- Note que as funções dadas nas restantes alternativas ou não passam pela origem ou os limites laterais no ponto $x = 1$ não correspondem ao gráfico dado.

28. A curva representada geometricamente na figura, tem a seguinte equação:



A: $y(x) = (x-1)^2 - 1$ B: $y(x) = (x-1)^2 + 1$ C: $y(x) = -(x+1)^2 + 1$
D: $y(x) = -(x-1)^2 - 1$ E: $y(x) = -(x+1)^2 - 1$

Resolução : A expressão analítica da curva dada tem a forma $y(x) = a(x-x_v)^2 + y_v$, onde (x_v, y_v) são as coordenadas do vértice. Temos $x_v = 1$, $y_v = -1$ e a ordenada na origem é -2, ou seja, a parábola passa pelo ponto $(0, -2)$. Assim,

$$y(x) = a(x-x_v)^2 + y_v \Rightarrow y(x) = a(x-1)^2 - 1$$
$$\Rightarrow -2 = a(0-1)^2 - 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow y(x) = -(x-1)^2 - 1$$

A resposta certa é **D**.

- Note que as expressões analíticas dadas nas restantes alternativas ou não passam do ponto (0,-2) ou não tem o vértice em (1,-1).

29. As assímptotas verticais A_V, horizontais A_H, oblíquas A_O da função $f(x) = e^T$, $T = \frac{1}{x}$ são:

A. $A_V : x = 1,\ A_H : y = e,\ A_O : y = x + 1$
B. $A_V : x = 1,\ A_H : y = 1,\ A_O : y = x$
C. $A_V : x = 0,\ A_H : y = 0,\ A_O :$ não existe
D. $A_V : x = 0,\ A_H : y = 1,\ A_O :$ não existe
E. a função não tem assímptotas

Resolução : Temos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = e^0 = 1,$$

então a recta $y = 1$ é assímptota horizontal.

Para determinarmos a assímptota oblíqua $y = mx + b$, calculamos

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(1/x)}{x} = 0$$

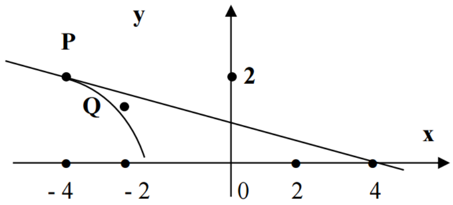
Assim, não existe assímptota oblíqua, pois, esta se reduz em horizontal que determinamos a cima.

Para determinarmos a assímptota vertical, notamos que $x = 0$ não pertence ao domínio de $f(x)$. Assim, calculamos

$$\lim_{x\to 0^+} \exp(1/x) = +\infty.$$

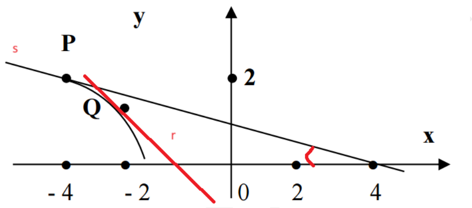
Assim, a recta $x = 0$ é assímptota vertical. A resposta certa é **D**.

30. Na figura ao lado estão representados os fragmentos dos gráficos de uma y função $y = f(x)$ e de uma tangente à curva no ponto P. Compare os valores da derivada da função nos pontos P e Q.



A. $f'(-2) > f'(-4)$
B. $f'(-2) < f'(-4)$
C. $f'(-2) = f'(-4)$
D. Nenhuma das anteriores
E. Os valores de $f'(-2)$ e $f'(-4)$ não são comparáveis.

Resolução : Tendo em conta que a derivada de f no ponto x_0 é o coeficiente angular da recta tangente à f no ponto $x = x_0$. Vemos pelo gráfico



que a recta s decresce com menor velocidade em relação à recta r. Assim, o declive de s é maior que o declive de r, ou seja, $f'(-4) > f'(-2)$. A resposta certa é **B**.

31. Um ponto material move-se pelo eixo recto segundo a lei $R(t) = -\frac{1}{6}t^3 + 3t^2 - 5$, ($t-$ segundos, $R-$ metros). A velocidade de movimento $v(t)$ em (m/s) e o instante do tempo T em (s) quando a aceleração de movimento é nula correspondem a:

A: $v(1) = 3,\ T = 1$ B: $v(3) = 9,\ T = 3$ C: $v(4) = 12,\ T = 4$
D: $v(5) = 16,\ T = 5$ E: $v(6) = 18,\ T = 6$

Resolução : Temos:

$$v(t) = R'(t) = -\frac{t^2}{2} + 6t,\ a(t) = v'(t) = -t + 6,$$

$a(t)$ corresponde a aceleração no instante t. Assim,

$$a(t) = 0 \Rightarrow -t + 6 = 0 \Rightarrow t = 6,\ v(6) = -\frac{6^2}{2} + 6 \cdot 6 = 18.$$

A resposta certa é **E**.

32. PASSE PARA A PERGUNTA SEGUINTE.

33. Resolvendo o sistema linear $\begin{cases} x + y = 5(x - y) \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ a soma dos valores de x e y é igual a:

A: 0 B: 1 C: 5 D: 3 E: Nenhuma das alteriores

Resolução : Temos:

$$\begin{cases} x+y=5(x-y) \\ 2x-3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+6y=0 \\ 2x-3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\cdot 2x+6y=0 \\ 2x=5+3y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(3y+5)+6y=0 \\ 2x=3y+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10=0 \\ 2x=3y+5 \end{cases}$$

é impossível. A resposta certa é **E**.

34. As rectas no plano cartesiano $y=\frac{1}{2}x+5$ e $y=k\cdot x-b$ são perpendiculares quando:

A: $k=2,\ b=5$ B: $k=2,\ b=-5$ C: $k=-0,5,\ b\in\mathbb{R}$
D: $k=1,\ b\in\mathbb{R}$ E: $k=-2,\ b\in\mathbb{R}$

Resolução : As rectas são perpendiculares se $\frac{1}{2}\cdot k=-1 \Rightarrow k=-2$ e $b\in\mathbb{R}$. A resposta certa é **E**.

35. Que figura no plano cartesiano é descrita pela equação $z\bar{z}=4$, onde z e $\bar{z}$ (conjugado de z) são os números complexos?

A. círculo fechado B. círculo aberto C. circunferência
D. elipse E. duas rectas intersectadas

Resolução : Seja $z=x+iy$, então $\bar{z}=x-iy$, $i=\sqrt{-1}$. Assim

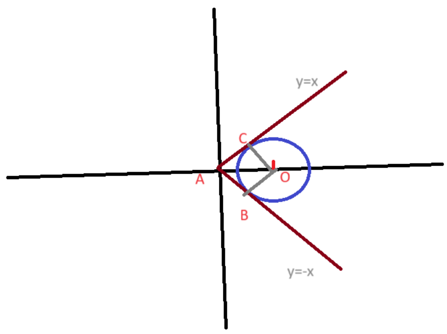
$$z\bar{z}=4 \Leftrightarrow (x+iy)(x-iy)=4 \Leftrightarrow x^2+y^2=4$$

Que é a equação da circunferência. A resposta certa é **C**.

36. O raio da circunferência cujo centro é o ponto $O'(\sqrt{18},0)$ e as rectas $y=x$, $y=-x$ são suas tangentes, é igual a:

A: 1 . B: 2 C: 3 D: 4 E: 5

Resolução : Da figura



vemos que o raio da circunferência é a distância do centro a uma das rectas tangentes. A distância de um ponto (x_0,y_0) até a reta $Ax+By+C=0$ é dada por: $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Para a reta $y=x$, temos $A=1,\ B=-1,\ C=0$. Assim,

$$d=\frac{|1\cdot\sqrt{18}-1\cdot 0+0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|\sqrt{18}|}{\sqrt{2}}=3$$

Portanto, o raio da circunferência é 3. A resposta certa é **C**.

37. O resultado de multiplicação da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ por $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ é a matriz:

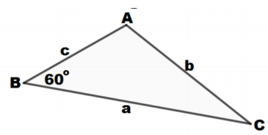
A. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ E. Não existe

Resolução : Temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 \\ (-1)\cdot(-1) + (-2)\cdot 0 + (-3)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

A resposta certa é **B**.

38. No $\triangle ABC$ o lado $a = 6cm,\ c = 3cm$, o ângulo $\angle B = 60^\circ$. A medida do lado b é igual à:



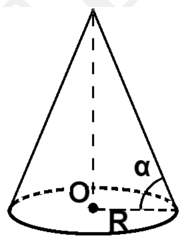
A. 5 B. $5\sqrt{3}$ C. 4 D. $3\sqrt{3}$ E. $\sqrt{3}$

Resolução : Usando o teorema dos cossenos, temos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ab\cos(60^\circ) = 6^2 + 3^2 - 2\cdot 6\cdot 3\cdot \frac{1}{2} = 27$$
$$\Rightarrow b = 3\sqrt{3}.$$

A resposta certa é **D**.

39. Seja o raio de base dum cone circular é igual a R, a geratriz faz um ângulo $\alpha = 60^\circ$ com a base. Seja o ângulo α diminuido por 15°. Em quantas vezes diminuirá o volume V do cone.



A: $6\sqrt{3}$ vezes B: $4\sqrt{3}$ vezes C: $2\sqrt{3}$ vezes D: $0,5\sqrt{3}$ vezes E: $\sqrt{3}$ vezes

Resolução : O volume do cone é $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, h altura. Quando α diminui 15°, $\alpha = 45^\circ$, teremos $\frac{h}{R} = \tan(45^\circ)$ ou seja $h = R$. Assim, quando $\alpha = 60^\circ$, teremos $h = R\tan(60^\circ)$. Desta forma,

$$\frac{V_f}{V_0} = \frac{1/3\pi R\cdot R\tan(45^\circ)}{1/3\pi R\cdot R\tan(60^\circ)} = \frac{1}{\tan(60^\circ)} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Assim $V_f = \frac{1}{\sqrt{3}}V_0$ vezes. Assim, V_0 diminui em $\sqrt{3}$ vezes. A resposta certa é **E**.

40. A primitiva $F(x)$ da função $f(x) = \sin(3x)$, sendo C uma constante arbitrária é:

A. $F(x) = \cos(3x) + C$ B. $F(x) = \frac{1}{3}\cos(3x) + C$ C. $F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C$
D. $F(x) = 3\cos(3x) + C$ E. $F(x) = 3\cos(3x) + C$

Resolução : Fazendo a substituição, $t = 3x$, teremos $dt = 3dx$ e :

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \sin(3x)\,dx = \int \frac{1}{3}\sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C,$$

onde C é constante arbitrária. A resposta é **C**.

- Note que a derivada das funções dadas nas outras alternativas é diferente de $f(x)$.

Exame de Matemática III de 2022

Correcção do exame de Matemática III de 2022

1. A solução da equação $|-3+x| = -3$ é:

   A. $x = 0$ B. $x = 6$ C. $x = 0$ ou $x = 6$ D. $x = -3$ E. $\emptyset$

   Resolução: O móduo de um número de um número real é sempre não negativo. Assim, esta equação não tem solução. A resposta certa é **E**.

2. $y = |ax^2 + bx + c|$ é uma função:

   A: Positiva B: Positiva quando $x \geq 0$ e negativa caso contrário C: Par D: Ímpar E: Não negativa

   Resolução : Temos:

   - Positiva: não é verdade. Pois, por exemplo $y = |x^2 - 1|$ toma valor zero quando $x = \pm 1$.
   - Positiva quando $x \geq 0$ e negativa caso contrário: não. Pois, $y = |x^2 - 1|$ toma valor zero quando $x = -1$.
   - Par: não é verdade. Pois, por exemplo a função $y = |x^2 - x|$ satisfaz $y(-2) = 6$ e $y(2) = 2$. Ou seja, $y(-2) \neq y(2)$, logo a função não é par.
   - Ímpar: não é verdade. Pois, por exemplo $y = |x^2 - 1|$ satisfaz $y(-2) = 3$ e $y(2) = 3$. Ou seja, $y(-2) \neq -y(2)$, logo a função não é ímpar.
   - Não negativa: é verdade. Pois, módulo de um número ou toma um valor positivo ou toma o valor zero.

   A resposta certa é **E**.

3. A solução da inequação $|x-2| \cdot |x-3| < 0$ é:

   A: $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$ B: $\emptyset$ C: $x \geq 2$ ou $x \geq 3$ D: Nenhuma das anteriores E: $x \in]2, 3[$

   Resolução : O móduo de um número real é sempre não negativo. E o produto de dois números com memso sinal é sempre positivo. Assim, esta inequação não tem solução. A resposta certa é **B**.

4. a e $|a|$ são sempre dois números...

   A. com valores simétricos

   B. com o mesmo valor

   C. valores recíprocos

   D. com valores iguais ou simétricos

   E. nenhuma das anteriores

   Resolução : Temos:

- com valores simétricos. Não, pois, por exemplo $a = 2$, temos, $|a| = 2$, ou seja, $|a| = a$. Estes são simétricos, no caso $a < 0$.
- com o mesmo valor. Não, pois, por exemplo $a = -2$, temos, $|a| = 2$, ou seja, $|a| \neq a$. Estes tem o mesmo valor, no caso $a > 0$.
- com valores iguais ou simétricos. Sim, pois, se $a \geq 0$, temos $|a| = a$ e se $a < 0$ temos $|a| = -a$.

A resposta certa é **D**.

5. O domínio de uma função modular deve sempre ser:

A. o conjunto de números reais
B. nenhuma das outras alternativas
C. positivos
D. simétrico
E. não negativo

Resolução : O domínio de uma função modular pode ser complexo. Por exemplo, $y = |f(x)|$ onde $f(x)$ é uma função qualquer. O domínio neste caso depende de $f(x)$, que pode ter diferentes condições de existência. A função $f(x) = \frac{1}{|x|}$, tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. A resposta certa é **B**.

6. Quantas permutações das letras ABCDEFGH contém a palavra ABC?

A: 720 B: 120 C: 4 D: Permutação de 8 E: 6

Resolução : Fixamos as letras ABC, consideramos estas como uma letra (designamos por L) e permutamos as letras LDEFGH. Obtemos, um número total de 6! = 720 permutações . A resposta certa é **A**.

- Note que listando algumas possibilidades, juntando ABC temos, por exemplo ABCDEFGH, DEFGHABC, ABCEDFGH, ABCFDEGH, ABCDEGH, FEDGHABC, FDEGHABC, ... que são permutações que satisfazem a condição dada. Desta forma, a resposta certa é um número não inferior a 7.
- Note que não podemos retirar ABC e permmutar os restantes, pois, a palavra ABC pode estar em diferentes posições, no início, no fim, no meio, depois da primeira letra, etc. Assim, não é corrrecto coniderar que tais permutações são $5! = 120$.
- Não é correcto considerar permutação de 8, pois, este caso, inclui os que as letras A, B e C não estão juntas.

7.

8. Um estudante pode escolher um projecto de estudo de entre 3 listas, a primeira tem 23 projectos, a segunda tem 15 projectos e a terceira tem 19 projectos. Quantas alternativas de escolha tem o estudante? (Onde C_r^n representa a combinação de n elementos r a r).

A: 6555 B: 57 C: $23C_{19}^{15}$ D: $19C_{23}^{15}$ E: Inversamente proporcional a k

Resolução : O estudante pode escolher da lista A, ou da lista B ou da lista C. Tendo em conta o total de possibilidades de cada lista, temos:

$$23 + 15 + 19 = 57.$$

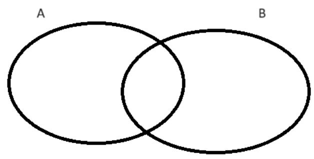
A resposta certa é **B**.

- Note que neste caso, não há agrupamento, daí que não faz sentido usar combinação.

9. Uma empresa recebeu candidaturas para ocupar 2 vagas. 220 candidatos concorreram para vaga A, 147 para a vaga B e 51 concorreram para 2 vagas. Quantos candidatos concorreram somente para a vaga A?

A: 271 B: 350 C: 220 D: 169 E: Nenhuma das anteriores

Resolução: Designemos por A o conjunto de pessoas que concorrem a vaga A, por B o conjunto de pessoas que concorrem a vaga B e $\#(C)$ representa número de elementos do conjunto C. Tendo em conta o diagrama



Temos $\#(A) = 220,\ \#(B) = 147,\ \#(A \cap B) = 51$. Os que somente concorrem a vaga A, são $\#(A \setminus B)$. Usando propriedades de conjunto, temos

$$\#(A \setminus B) = \#(A) - \#(A \cap B) = 220 - 51 = 169.$$

A resposta certa é **C**.

- Note que não é correcto fazer a diferença $\#(A) - \#(B)$, pois, podem existir elementos do conjunto B que não pertencem ao conjunto A, ou seja, podem existir candidatos que apenas concorreram à vaga B. Mais, este número não pode ser superior a 220.

10. De quantas formas podem ser selecionados 49 estudantes de uma turma de 52? Onde A_n^r representa o arranjo de n elementos r a r.

A: 22100 B: 3 C: A_{52}^{47} D: 2548 E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Para formar grupos de pessoas, a ordem não interessa. Desta forma, usamos

$$C_{49}^{51} = \frac{52!}{(52-49)!49!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49!}{49! \cdot 3!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50}{6} = 22100.$$

A resposta certa é **A**.

11. Quantas palavras de comprimento r podem ser construídas com um alfabeto de n letras?

A: $n \cdot r$ B: $\frac{n!}{(n-r)!}$ C: $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ D: n^r E: Nenhuma das anteriores

Resolução: Temos n possibilidades para escolher a primeira letra, n possibilidades para escolher a segunda letra, ..., n possibilidades para escolher a k-ésima letra. Assim,

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots n}_{r\ vezes} = n^r.$$

A resposta certa é **D**.

- Este exercício pode ser considerado como permutação com reposição e o resultado é n^r.

12. A C_n^r (C_n^r é a combinação de n elementos r a r) é:

    A: é uma operação usada para fazer agrupamentos com repetições múltiplas

    B. é uma operação usada para fazer agrupamentos com apenas uma repetição

    C. produz grupos sem repetição

    D. faz arranjos de elementos de um conjunto.

    E. Nenhuma das anteriores

    Resolução : Combinação dá o número de grupos de n elementos tomados r a r, sem repetição e onde a ordem não interessa. A resposta certa é **E**.

    - Note que a ordem faz muita diferença. Pois, quando a ordem interessa pode-se usar arrranjo.

13. Seja $f(x)$ uma função par, então:

    A: $f(x) = f(2x)$
    B: $f(x) = |f(x)|$
    C: $f(x) - f(-x) = 0$
    D: $-f(x) = f(-x)$
    E: $f(x) = 2f(g(x))$ para uma função $g(x)$ no mesmo domínio da função $f(x)$

    Resolução : Uma função real de variável real $f(x)$ diz-se par, se para cada elemento x do domínio de f, o elemento $-x$ também pertence ao domínio de f e, $f(-x) = f(x)$.

    Temos:

    - $f(x) = f(2x)$, não está certa, pois, por exemplo a função

      $$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x \geq 0 \\ 4, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

      Temos $f(x) = f(2x)$ mas $f(-2) \neq f(2)$. Logo, f não é par.
    - $f(x) = |f(x)|$, não está certa, pois, por exemplo a função $f(x) = 2^x$ satisfaz $f(x) = |f(x)|$ mas $f(-2) \neq f(2)$. Logo, f não é par.
    - $f(x) - f(-x) = 0$, temos $f(x) = f(-x)$, logo, f é par.
    - $-f(x) = f(-x)$, não está certa, pois, por exemplo a função $f(x) = x$, satisfaz $-f(1) = f(-1)$ mas $f(-1) \neq f(1)$, logo, f não é par.
    - $f(x) = f(-x)$, logo, f é par.
    - $f(x) = 2f(g(x))$ para uma função $g(x)$ no mesmo domínio da função $f(x)$. Não. Pois, por exemplos a funções $g(x) = x + 1$, $f(x) = 2$, temos $f(x) = 2f(x + 1)$, $f(0) = 2f(1)$ $f(-1) = 2f(0) = 4f(1)$. Mais, $f(-1) = 2 \neq f(1) = 8$.

    A resposta certa é **D**.

14. Duas funções lineares, a composição destas $f(g(x))$ ou $g(f(x))$ são:

    A. funções iguais

    B. funções simétricas

    C. funções recíprocas

    D. funções lineares

    E. funções de ordem superior a linear

Resolução : Seja $f(x) = ax + b,\ g(x) = kx + m,\ a, b, k, m$ são constantes. Temos:

$$f(g(x)) = a(kx + m) + b = akx + am,$$
$$g(f(x)) = k(ax + b) + m = akx + kb + m.$$

As funções $f(g(x))$ e $g(f(x))$ são lineares, em geral diferentes, não simétricas ($f(g(x)) \neq -g(f(x))$), não recíprocas ($f(g(x)) \cdot g(f(x)) \neq 1$). A resposta certa é **D**.

15. A função $f(x) = x^2 - 4x + c$ tem zeros diferentes se e somente se:

A: $c = 4$ B: $c < 4$ C: $c > 4$ D: $c \leq 4$ E: $c \geq 4$

Resolução : Considere a função $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$. Então,

- $f(x)$ tem dois zeros reais e distintos, se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$;
- $f(x)$ tem dois zeros reais e iguais, se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$;
- $f(x)$ não tem zeros em $\mathbb{R}$, se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

A função $f(x) = x^2 - 4x + c$ tem zeros diferentes se e somente se o descriminante $(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c > 0$. Temos: $16 - 4c > 0 \Rightarrow c < \frac{16}{4} = 4$. A resposta certa é **B**.

- Nas outras alternativas ou a função tem dois zeros iguais ou não tem zeros.

16. Os arcos de uma ponte são descritos por uma função $f(x) = x^2 + 2x,\ x \in]-3, 0]$. Sabendo que $f(x)$ é periódica e de período igual a 3, determine $f(7)$.

A: 15 B: 3 C: 0 D: 2 E: -8

Resolução : Uma função é periódica se existe $T > 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x + T) = f(x)$. Assim, $T = 3$ e $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x + 3) = f(x)$. Assim,

$$\begin{aligned} f(7) &= f(4 + 3) = f(4) = f(1 + 3) = f(1) \\ &= f(-2 + 3) = f(-2) = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) = 4 - 4 = 0. \end{aligned}$$

A resposta certa é **C**.

17. As funções $f(x) = 2x^2 - 3x + 3,\ g(x) = -x + 4$ são definidas no mesmo. Determine os pontos de interseção entre elas.

A. Não existem pontos de intersecção
B: $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$
C: $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$
D: $x = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$
E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Procuramos o ponto de intersecção destas funções fazendo $f(x) = g(x)$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x^2 - 3x + 3 = -x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{4}.$$

Visto que o descriminate é -4, então, esta equação não tem raízes em $\mathbb{R}$. Logo, não existe ponto de interseção. A resposta certa é **A**.

18. A imagem da função $f(x) = 5\cos(2x) + 1$ encontra-se em:

    A: $[-1, 1]$ B: $[-5, 5]$ C: $[0, 1]$ D: $[-4, 6]$ E: Nenhuma das anteriores

    Resolução : Tendo em conta que $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, então, $-1 \leq \cos(2x) \leq 1$. Então, multiplicando por 5 a esta desigualdade, temos: $-5 \leq 5\cos(2x) \leq 5$. Adiconando 1 unidade a esta desigualdade temos:

    $$-5 + 1 \leq -5\cos(x) + 1 \leq 5 + 1 \Rightarrow -4 \leq -5\cos(x) + 1 \leq 6.$$

    A resposta certa é **D**.

19. O número de bons ovos em um galinheiro é aproximadamente igual a $E(n) = 2n^2 + \frac{n-1}{4}$ onde n representa o número de dias desde a criação do galinheiro. Quantos ovos bons existiam no início da criação e quantos depois de 24 horas?

    A: 0 e 2 respectivamente B: 0 ovos C: -0.25 e 2 D: -0.25 E: 2

    Resolução: Matematicamente, $n = 0$ significa o inínio da criação e $n = 1$, significa que passou 1 dia (24 horas). Assim,

    $$E(0) = 2 \cdot 0^2 + \frac{0-1}{4} = -\frac{1}{4} = -0,25, \quad E(1) = 2 \cdot 1^2 + \frac{1-1}{4} = 2.$$

    A resposta certa é **C**.

20. Determine o termo geral da sucessão $\frac{5}{3}, \frac{7}{8}, \frac{9}{15}, \ldots$

    A: $a_n = \frac{2n+1}{n^2-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$
    B: $a_n = \frac{2n+1}{n^2-1}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
    C: $a_n = \frac{2n+1}{n^2-1}$,
    D: $a_n = \frac{2n+1}{n^2-1}$, $n = 2, 3, \ldots$
    E: Nenhuma das anteriores

    Resolução : Observando a sucessão do numerador é 5,7,9, ...e a sucessão do denominador é 3,8,15, ... Para o numerador, temos $u_{n+1} - u_n = 2$ é uma progressão aritmética de razão 2. Temos: $u_n = 5 + 2(n-1) = 2n + 3$, com $n = 1, 2, \ldots$.

    Para o denominador, temos não temos nem progressão aritmétrica e nem progressão geométrica. Mas, notamos que

    $$3 = 2^2 - 1, \; 8 = 3^2 - 1, \quad 15 = 4^2 - 1,$$

    o que sugere a sucessão de termo geral $v_n = n^2 - 1$, $n = 2, 3, \ldots$. Assim, devemos escrever u_n começando de $n = 2, 3, \ldots$. Para tal, fazemos $k = n + 1$, temos $u_k = 2(k-1) + 3 = 2k + 1$, $k = 2, 3, 4 \ldots$. Assim,

    $$a_k = \frac{u_k}{v_k} = \frac{2k+1}{2^k - 1}, \; k = 2, 3, \ldots$$

    Podemos escrever em termos de n, ou seja, trocar k por n. Temos:

    $$a_n = \frac{u_n}{v_n} = \frac{2n+1}{2^n - 1}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

    A resposta certa é **D**.

    - Note que as expressões analíticas dadas nas alternativas A e B não satisfazem $a_1 = \frac{5}{3}$.

21. Determine a soma dos primeiros 12 termos da sucessão 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

A: $S_{12} = 375$ B: $S_{12} = \frac{1-r^n}{1-r}$ C: $S_{12} = 6(a_1 + a_{12})$
D: $S_{12} = 350$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Temos:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = a_1 + a_2 = 2,\ a_4 = a_2 + a_3 = 3,\ a_5 = a_3 + a_4 = 5,$$
$$a_6 = a_4 + a_5 = 8,\ a_7 = a_5 + a_6 = 13,\ a_8 = a_6 + a_7 = 21,\ a_9 = a_7 + a_8 = 34,$$
$$a_{10} = a_8 + a_9 = 55,\ a_{11} = a_9 + a_{10} = 89,\ a_{12} = a_{11} + a_{10} = 144.$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_{12} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{12} &= 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 \\ &+34 + 55 + 89 + 144 = 376. \end{aligned}$$

A resposta certa é **E**.

22. Diz-se que uma sucessão a_n é estritamente crescente se:

A. os valores de n forem crescentes

B. os valores de n forem crescentes na medida em que a_n for crescendo

C. os valores de a_n forem crescendo na medida em que o n vai crescendo

D. os valores de a_n forem crescendo ou constantes na medida em que o n for crescendo.

E. Nenhuma das anteriores

Resolução : Temos: uma sucessão a_n é estritamente crescente se $a_n < a_{n+1}$ para qualquer n, ou seja, à medida que n cresce, os valores de a_n crescem. A resposta certa é **C**.

- Note que a alternativa D, é parecida com a C, no entanto, significa que a_n é crescente e não estritamente crescente.

23. No fim de 131 dias de colheita, um certo produto vai ser comercializado a 10 meticais por unidade. Sabendo que nos diferentes dias de colheita foram feitos os seguintes registos de quantidades colhidas, 3, 4.5, 6, 7.5, 9, ..., determine o valor monetário arrecadado depois da comercialização.

A: 131 655 MT B: 1310 MT C: 393MT D: 90 MT E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Seja a_n a quantidade produzida do produto colhida no $n-$ésimo ano. Assim,

$$a_1 = 3,\ a_2 = 4.5,\ a_3 = 6, \ldots$$
$$a_2 - a_1 = 1,5,\ a_3 - a_2 = 1,5, \ldots$$

então a_n forma uma progressão aritmética de razão $d = 1,5$. O termo geral é

$$a_n = a_1 + d(n-1) = 3 + 1,5(n-1) = 1,5n + 1,5.$$

Supondo que comercializa-se todas as quantidades colhidas, o valor monetário arrecadado depois da comercialização é

$$s_{131} \cdot 10\text{Mt}, \tag{4}$$

onde s_{131} é a soma dos primeiros 131 termos da sucessão. Temos:

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow s_{131} = \frac{3 + a_{131}}{2} \cdot 131 = \frac{3 + a_1 + 130 \cdot d}{2} \cdot 131$$

$$= \frac{3+3+130\cdot 1,5}{2}\cdot 131 = 13165,5.$$

Desta forma, (4) torna-se

$$s_{131}\cdot 10 \text{ Mt} = 131655\text{Mt}.$$

A resposta certa é **A**.

24. Uma fábrica de produção de calçado pretende a partir do mês de Maio de 2022, incrementar a sua produção em 10 unidades por mês. No mês de Abril de 2022, ela produzirá 100 calçados. Determine a quantidade que deverá ser produzida no mês de Maio de 2083.

A: 7430 B: 6200 C: 161 D: 74100 E: 741 000

Resolução : Seja a_n o número de calçado produzido após n meses, a contar desde Maio de 2022, sendo que no fim do mês de Maio de 2022 faz o primeiro mês.

O termo geral tem a forma $a_n = a_1 + d(n-1)$, onde $d = 10$. No dia 30 de Maio, será produzido 100+10=110 calçados. Assim, $a_1 = 110$ e

$$a_n = 110 + 10(n-1) = 100 + 10n.$$

De Junho de 2022 a Maio de 2083, teremos 61 anos que corresponde a $61\cdot 12 = 732$ meses e mais o mês de Maio de 2022, teremos 733 meses.

Desta forma,

$$a_{733} = 100 + 10\cdot 733 = 7430.$$

A resposta certa é **A**.

25. Se o vigésimo termo de uma progressão geométrica de razão 0.5 é igual a 23, determine o termo na posição 50.

A: $a_{50} = 23(0,5)^{49}$ B: $a_{50} = 23(0,5)^{50}$ C: $a_{50} = 1150$
D: $a_{30} = 23(0,5)^{30}$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução : O termo geral tem a forma $a_n = a_1 q^{n-1}$, onde q é a razão e a_1 é o primeiro termo. Assim $q = 0,5$ e

$$a_{20} = a_1\cdot q^{19} \Rightarrow a_1 = \frac{a_{20}}{q^{19}} = \frac{23}{(0,5)^{19}}.$$

Desta forma,

$$a_{50} = a_1 q^{49} = \frac{23}{(0,5)^{19}}\cdot (0,5)^{49} = 23\cdot (0,5)^{49-19} = 23\cdot (0,5)^{30}.$$

A resposta certa é **D**.

26. Se $f(x) = 2^{-x}$, então $f(0) + f(1) + \ldots + f(100)$ será:

A. $S = 2 - 2^{-101}$ B. $S = 2^{50} - 2^{-50}$ C. $S = 2 - 2^{-101}$
D. $S = 2 + 2^{-100}$ E. $S = 2 - 2^{-100}$

Resolução : Temos:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{100}}$$

Esta corresponde a soma dos primeiros termos duma progressão geométrica de razão:

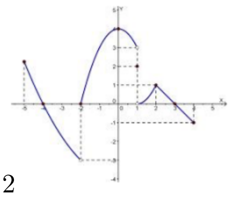
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = \frac{1}{2},\ n = 1, 2, \ldots$$

Temos:

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{101})}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^{101}}\right) = 2\cdot\frac{(2^{101}-1)}{2\cdot 2^{100}} = 2-2^{-100}.$$

Assim, $S = 2-2^{-100}$. A resposta certa é **E**.

27. Para a função a abaixo, os valores de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2^-}$, $f(x)$ e $f(1)$, são respectivamente iguais a:



A. Não existe, -3, 2 B. $2, 0, 2$ C. 0, -3, 0
D. 3, 0, 0 E. Nenhuma das anteriores

Resolução : Temos:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3,\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)\ \Rightarrow\ \text{não existe.}$$
$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -3,\ f(1) = 2.$$

A resposta certa é **A**.

28. O limite da função $f(x)$ quando $x \to a$ é:

A: o valor de $f(x)$ quando $x = a$
B: o valor de $f(x)$ quando $x \neq a$
C: o valor de $f(x)$ quando x é proximo de a
D: o valor do domínio de $f(x)$
E: indeterminado se $x = 0$

Resolução : Por definição $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se a função $f(x)$ aproxima-se de L com um erro ε escolhido, então x aproxima-se de a com um erro deterinado por em função do erro ε. Quer dizer que à medida que nos aproximamos de a, a função $f(x)$ aproxima-se de L. A resposta certa é **C**.

- Note que o limite não depende do valor de $f(x)$ no ponto $x = a$, mas sim de valores de $f(x)$ quando x está próximo de a.

29. O resultado do cálculo da expressão $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1}$ é:

A. 0 B. 1 C. indeterminado D. -1 E. Nenhuma das anteriores

Resolução : Temos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1-1}{1+1} = 0.$$

A resposta certa é **A**.

30. Seja dada a função : $f(x) = \begin{cases} x-2, & x<1 \\ kx^2, & x \geq 1. \end{cases}$ Determine o valor de k, de modo que a função seja contínua.

A: $k = \frac{1}{x^2}$ B: $k = 5$ C: $k = 7x - 2$ D: $k = \frac{7x-2}{x^2}$ E: Nenhuma das alternativas anteriores

Resolução : A condição de continuidade de uma função $f(x)$ no ponto $x = x_0$ é:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

As funções $x-2$ e kx^2 são funções polinomiais, são contínuas nos seus respectivos domínios de definição. O ponto que suscita dúvida quanto à continuidade de $f(x)$ é $x = 1$. Usando a condição de continuidade neste ponto, teremos:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to 1-} (x-2) = \lim_{x \to 1^+} kx^2 = k \Rightarrow -1 = k$$

A resposta certa é **E**.

31. Para uma função $f(x)$, se $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ então:

A. a função tem assimptota em $\pm\infty$
B. a é assimptota horizontal
C. a é assimptota vertital.
D. $f(x)$ é uma função contínua em todo o seu domínio.
E. Nenhuma das anteriores

Resolução : Por definição , se $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ então, $f(x)$ tem uma assímptota vertical $x = a$. A recta $y = mx + b$ é assímptota se a distância de um ponto variavel $P(x, y)$ da função $f(x)$ à recta $y = mx + b$ tende para zero quando pelo menos uma das coordenadas de P tende para o infinito. Neste caso, quando $y \to \infty$ e x é próximo de a, a distância de P à recta tende para zero. A resposta certa é **C**.

32. A velocidade de uma gota de chuva em queda livre é dada por $v(t) = v_f(1 - e^{-\frac{gt}{v_f}})$, onde $(g = 9,8\frac{m}{s^2}$ e v_f é a velocidade final da gota. Se uma gota cai de um ponto muito alto de tal modo que precise de uma infinidade de segundos para chegar ao chão , determine a velocidade da queda.

A: ∞ B: $-\infty$ C: 0 D: v_f E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Calculamos o limite

$$v = \lim_{t \to \infty} v_f(1 - e^{-\frac{gt}{v_f}}) = v_f(1 - e^{-\infty}) = v_f.$$

A resposta certa é **D**.

33. Suponha que $f(x) = \log_{5\sqrt[3]{5}}^{(x^4)}$ indica em centenas x dias depois da libertação de um inimigo natural das bactérias. Quantas bactérias terá o ambiente no início do sexto dia depois que se liberta o predador?

A: 3 B: 200 C: 300 D: 400 E: 4

Resolução: No início do sexto dia depois que se liberta o predador corresponde a $x = 5$. Assim, usamos as propriedades $\log_a^{b^m} = m\log_a^b$, $a, b > 0$, $a \neq 1$, $\log_{a^m}^b = \frac{1}{m}\log_a^b$, $m \neq 0$, temos:

$$f(5) = \log_{5\sqrt[3]{5}}^{(5^4)} = 4\log_{5\sqrt[3]{5}}^5 = 4\log_{5^{\frac{4}{3}}}^5 = 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \log_5^5 = 3\text{centenas} = 300.$$

A resposta certa é **C**.

34. Uma empresa está a fabricar autocarros da marca Moçambique e encontra-se na fase de testes da velocidade que os autocarros podem atingir passados x segundos tendo dos testes definido a função velocidade

$$v(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ ax^2 - bx + 3, & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Os engenheiros querem que a velocidade evolua de modo a evitar mudanças abruptas desta. Determine os valores de a e b, para a satisfação dos engenheiros.

A: $a = 0.5,\ b = -0.5$ B: $a = b = 0.5$ C: $a = -2.5,\ b = -5.5$
D: $a = -2.5,\ b = 4.5$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução :

A condição de continuidade de uma função $f(x)$ no ponto $x = x_0$ é:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

As funções $\frac{x^2-4}{x-2}$, $ax^2 - bx + 3,\ 2x - a + b$ são funções contínuas em $[0, 2[,\ [2, 3[,\ [3, \infty[$. Os pontos que suscitam dúvida quanto à continuidade de $f(x)$ são $x = 2$ e $x = 3$. Usando a condição de continuidade nestes pontos, teremos:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \\ \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = f(3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^+} (ax^2 - bx + 3) = 4a - 2b + 3 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} (ax^2 - bx + 3) = \lim\limits_{x \to 3^+} (2x - a + b) = 6 - a + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4a - 2b + 3 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} (ax^2 - bx + 3) = 6 - a + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (x+2) = 4a - 2b + 3 \\ 9a - 3b + 3 = 6 - a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 4a - 2b + 3 \\ 10a - 4b - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b - 1 = 0 \\ 10a - 4b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8a + 4b + 2 = 0 \\ 10a - 4b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 0 \\ 10a - 4b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0.5 \\ b = 0.5 \end{cases}$$

A resposta certa é **B**.

- Note que substituindo os valores de a e b dados nas outras alternativas, não satisfaz as condições de continuidade.

35. A derivada de $f(x) = ax^2 + \sqrt{x} + \ln(2x) + e^{3x}$ é:

A: $f(x) = 2ax + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + 3e^{3x}$
B: $f(x) = 2ax + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + 3e^{3x}$
C: $f(x) = 2ax + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} + 3e^{3x}$
D: $f(x) = 2ax + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x} + 3e^{3x}$
E: Nenhuma das alternativas anteriores

Resolução : Usando as seguintes regras de derivação,

$$(x^n)' = nx^{n-1},\ (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),\ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)},\ (e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)},$$

temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (ax^2+\sqrt{x}+\ln(2x)+e^{3x})' = (ax^2)'+(\sqrt{x})'+(\ln(2x))'+(e^{3x})' \\ &= 2ax+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{(2x)'}{2x}+(3x)'e^{3x} = 2ax+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x}+3e^{3x}. \end{aligned}$$

A resposta certa é **B**.

36. O resultado da integral $\int \left(x^2+\frac{2}{x}+2^x\right)dx$

A: $f(x)=\frac{x^3}{3}+2\ln(x)+x2^{x-1}+c,\ c\in\mathbb{R}$
B: $f(x)=\frac{x^3}{3}-2\ln(x)+x2^{x-1}+c,\ c\in\mathbb{R}$
C: $f(x)=\frac{x^3}{3}+2\ln(x)+\frac{2^x}{\ln 2}+c,\ c\in\mathbb{R}$
D: $f(x)=\frac{x^3}{3}+2\ln(x)-\frac{2^x}{\ln 2}+c,\ c\in\mathbb{R}$
E: $f(x)=\frac{x^3}{3}+2\ln(x)+(\ln 2)2^x+c,\ c\in\mathbb{R}$

Resolução : Usando as seguintes regras de integração,

$$\int x^n dx = \frac{x^n}{n+1}+c, n\neq -1,$$
$$\int (\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int f(x)+\beta\int g(x))dx, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+c,\qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+c,\ a>0, c\in\mathbb{R},$$

temos:

$$\begin{aligned} \int \left(x^2+\frac{2}{x}+2^x\right)dx &= \int x^2dx+\int\frac{2}{x}dx+\int 2^x dx \\ &= \frac{x^3}{3}+2\ln|x|+\frac{2^x}{\ln 2}+c, \end{aligned}$$

onde c é uma constante arbitrária. A resposta certa é **C**.

- Note que a derivada de $x^2+\frac{2}{x}+2^x$ não coincide com nenhuma das funções paresentadas nas restantes alternativas.

37. Determine a equação da recta tangente a $y=x^3-4x+1$ no ponto $P(2,1)$ é:

A: $y=8x$ B: $y=8x+15$ C: $y=3x^2-4$
D: $y=8x-15$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução : A equação da recta tangente à curva $y=f(x)$ no ponto (x_0,y_0) é:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

Temos, $f'(x)=3x^2-4,\ f'(2)=3\cdot 2^2-4=8.$ Assim, a equação da recta tangente é:

$$y-1=8(x-2)\Rightarrow y=8x-15.$$

A resposta certa é **D**.

38. O valor que minimiza a função $f(x) = 3x^2 - x + 1$ é:

A: $\frac{1}{3}$ B: $-\frac{1}{3}$ C: $\pm\frac{1}{3}$ D: $\frac{1}{6}$ E: $\frac{7}{9}$

Resolução : O gráfico desta função é uma parábola com concavidade virada para baixo, pois é uma função quadrática com o coeficiente de x^2 positivo. Esta função tem um mínimo e o mínimo atinge-se quando $x = x_v$, x_v é a abcissa do vértice. Para determinar x_v, escrevemos a função na forma $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$. Formando quadrado perfeito, teremos:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - x + 1 = 3\left(x^2 - \frac{x}{3}\right) + 1 = 3\left(x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{6^2}\right) + 1 \\ &= 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{3}{36} + 1 = 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{33}{36} = 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

Desta forma, $x = x_v = \frac{1}{6}$ é o valor que minimiza a função $f(x)$. A resposta certa é D.

- Note que é possível usar derivada e determinar os extremos da função.

39. Para uma função $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, o ponto x_0 é ponto de mínimo se:

A. $f'(x_0) = e,\ f''(x_0) > 0$ B. $f'(x_0) = 0,$ C. $f''(x_0) = 0,$
D. $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0$ E. $f'(x_0) = e,\ f''(x_0) < 0$

Resolução : Suponhamos que a função $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, tem um mínimo no ponto x_0. Sendo o gráfico de $f(x)$ uma parábola, terá mínimo se a concavidade estiver virada para cima e isto acontece quando $a > 0$. O ponto mínimo obtém-se quando $x_0 = x_v = -\frac{b}{2a}$. De outro lado, $f'(x) = 2ax + b$ e substituindo $x = x_0$, obtemos

$$f'(x_0) = f'\big(-\frac{b}{2a}\big) = 2a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + b = 0.$$

Assim, $f'(x_0) = 0$. Calculando a segunda derivada, obtemos $f''(x) = 2a$. Visto que $a > 0$, teremos $f''(x_0) > 0$. A resposta certa é **D**.

40. A divisão dos números $z_1 = x - iy$ por $z_2 = 3y + xi$ é:

A: $\frac{2xy - (x^2 + 3y)i}{9y^2 + x^2}$ B: Não determinado C: $\frac{x}{3y} - \frac{y}{x}$
D: $\frac{x}{3y} - \frac{y}{x}i$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Multiplicando, dividindo pelo conjugado do denominador e tendo em conta que $i^2 = -1$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x - iy}{3y + xi} = \frac{(x - iy)(3y - xi)}{(3y + xi)(3y - xi)} = \frac{3xy - i3y^2 - x^2 i - xy}{9y^2 + x^2} \\ &= \frac{2xy - ix^2 - i3y^2}{9y^2 + x^2} = \frac{2xy - i(x^2 + 3y^2)}{9y^2 + x^2}. \end{aligned}$$

A resposta certa é **A**.

Exame de Matemática I de 2023

Correcção do exame de Matemática I de 2023

1. Simplificando a expressão $\dfrac{2(a^2-1)+(a+1)}{(a+1)-2(a+1)^2}$ tem-se:

   A: -1 B: $\dfrac{2a-1}{2a-3}$ C: $\dfrac{2a-1}{1+2a}$ D: $-\dfrac{2a-1}{1+2a}$ E: $-\dfrac{2a-1}{3+2a}$

   Resolução: A expressão dada existe para valores de "a" para os quais $(a+1)-2(a+1)^2 \neq 0 \Longrightarrow (a+1)[1-2(a+1)] \neq 0 \Rightarrow a \neq -1, \wedge a \neq \dfrac{3}{2}$. Agora simplifiquemos a expressão,

   $$\begin{aligned}\frac{2(a^2-1)+(a+1)}{(a+1)-2(a+1)^2} &= \frac{2(a-1)(a+1)+(a+1)}{(a+1)-2(a+1)^2} = \frac{(a+1)[2(a-1)+1]}{(a+1)[1-2(a+1)]} \\ &= \frac{2(a-1)+1}{1-2(a+1)} = -\frac{2(a-1)+1}{2(a+1)-1} = -\frac{2a-1}{2a+1}.\end{aligned}$$

   Logo, a resposta certa é **D**.

2. A expressão $|\sqrt{3}-2|$ é equivalente a:

   A: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B: $\sqrt{3}-2$ C: $2\sqrt{3}$ D: $-2\sqrt{3}$ E: $2-\sqrt{3}$

   Resolução: Visto que $\sqrt{3}<2$ e o módulo de um número nunca é negativo então, $|\sqrt{3}-2| = |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$. A resposta certa é **E**.

3. A solução da equação $|x+4|<6$ é:

   A: $x>2$ B: $x>-10$ C: $-10<x<2$ D: $x>-10, \vee x>2$ E: $x<2$

   Solução: Usando a definição $|y|<a \Rightarrow -a<y<a$, temos

   $$|x+4|<6 \Longrightarrow -6<x+4<6 \Longrightarrow -10<x<2.$$

   A resposta certa é **C**. As alternativas **A** e **D** não estão correcta pois contêm valores de x que não satisfam a inequação dada, por exemplo $x=4$ pertence às duas soluções, mas $|4+4|<6$ não é verdadeira. A Para a alternativa **E**, $x=-14$ pertence ao conjunto dado e a afirmação $|-14+4|<6$ também não verdadeira.

4. Um número x dista 5 unidades de 4. Na forma simbolica escreve-se:

   A: $|x+4|=5$ B: $|x-5|=4$ C: $|x+5|=4$ D: $|x-4|=5$ E: $x-4=5$

Solução: A distância entre dois pontos em $\mathbb{R}$ é igual ao módulo da diferença entre esses números e no nosso casso essa distância é igual à 5, deste mod temos $|x-4|=5$. Logo, a resposta certa é **D**.

5. O(s) valor(es) de x que satisfaz(em) a condição da questão anterior é(são):

   A: $x=9$ B: $x=-1$ C: $x=1$ D: $x=-1 \vee x=9$ E: $x=1 \vee x=9$

   Resolução: Usando a definição $|y|=a \Leftrightarrow y=-a \vee y=a$, temos

   $$|x-4|=5 \Leftrightarrow x-4=-5 \vee x-4=5 \Rightarrow x=-1 \vee x=9.$$

   Assim, a resposta certa é **D**.

6. QA expressão $\dfrac{|x-2|}{x-2}$ para valores de $x<2$ é equivalente a:

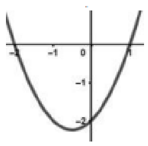
   A: 1 B: $\dfrac{x+2}{x-2}$ C: $\dfrac{x-2}{x+2}$ D: -1 E: $\dfrac{-1}{x-2}$

   Resolução: Por definição de módulo $|x-2|=\begin{cases} x-2, & x\geq 2 \\ -(x-2), & x<2 \end{cases}$ temos

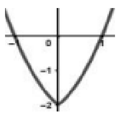
   $$\frac{|x-2|}{x-2}=\frac{-(x-2)}{x-2}=-1.$$

   A resposta certa é **D**.

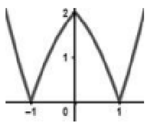
7. O gráfico abaixo represente a função $y=g(x)$. O gráfico que representa $f(x)=|g(x)|$ é:



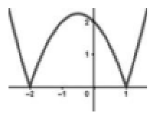
A.



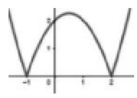
B.



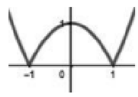
C.



D.



E.



Resolução: Note que o gráfico pretendido é da função modular, neste caso as partes negativas da função dada passam a ser positivas para os mesmos valores de x e tem os mesmos zeros de função com $g(x)$ i.e., $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$. O gráfico com estas características é da figura C. Logo, a resposta certa é **C**.

8. $\dfrac{5! - 3!}{4!}$ é equivalente a:

A: $\dfrac{1}{2!}$ B: $\dfrac{5}{4}$ C: $\dfrac{21}{4}$ D: $\dfrac{3}{4}$ E: $\dfrac{19}{4}$

Resolução: Usando a definição de factorial de um número i.e, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, temos:

$$\frac{5! - 3!}{4!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3! - 3!}{4 \cdot 3!} = \frac{3! \cdot (5 \cdot 4 - 1)}{4 \cdot 3!} = \frac{19}{4}.$$

Então, a resposta certa é **E**.

9. A solução da equação $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 6$ é:

A: $n = 2 \lor n = -3$ B: $n = -2 \lor n = 3$ C: $n = 3$ D: $n = 2$ E: $-n = -2 \lor n = 3$

Resolução: Como no exercício anterior, usando a definição de factorial temos:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 6 \Rightarrow \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = 6 \Rightarrow (n+1) \cdot n = 6 \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0.$$

Esta última é uma equação quadratica com $a = 1$, $b = 1$, $c = -6$. Assim $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$. Dete modo,

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} \Rightarrow n_1 = \frac{-1+5}{2} = 2, \quad n_2 = \frac{-1-5}{2} = -3.$$

Pelo facto de que factorial opera apenas sobre números naturais incluindo zero, temos como ,solução $n = 2$. Logo, a resposta certa é **D**.

- A alternativa A não é correcta pois inclui $n = -3$ que não faz parte da solução;
- A alternativa E não está certa porque contém $n = 3$ que não satisfaz a equação dada.

10. Com três calças e cinco camisas, de quantas maneiras diferentes é possível compor um traje?

A: 15 B: 20 C: 125 D: 12 E: 243

Resolução: Note que temos 3 formas diferentes de escolher uma calça e 5 maneiras diferentes de escolher uma camisa. Deste modo teremos $3 \cdot 5 = 15$ maneiras diferen tes possíves para escolher um traje. Portanto, a resposta certa é **A**.

11. Quantas palavras, com ou sem sentido, é possível escrever usando todas as letras da palavra PINCEL, sem repetir nenhuma?

A: 36 B: 720 C: 6 D: 120 E: 50

Resolução: Visto que a palavra PINCEL é formada por todas as 6 letras diferentes, basta neste caso permutá-las para obter diferentes palavras i.e., $6! = 720$. Logo, a alternativa certa é **B**.

12. Quantos números de três algarísmos é possível escrever usando os algarísmos $2, 4, 7, 8, 9$ sem repetir nenhum?

A: 60 B: 20 C: 13 D: 50 E. 21

Resolução: Notemos que para um número de três algarísmos, temos três espaços $- - -$ por preencher. Com os 5 algariísmos dados, temos 5 possibilidades para o primeiro espaço. Visto que não podemos repetir os algarímos, teremos 4 possibilidades para o segundo algarísmo do número pretendido e 3 possibilidade para o último algariísmo. Deste modo, podemos formar $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ números diferente. Logo, a resposta certa é **A**.

13. A solução da equação $C_2^n = 6$ é

A: $n = 4 \vee n = -3$ B: $n = -4 \vee n = 3$ C: $n = 3$ D: $n = 4$ E: $n = 6$

Resolução : Pela definição de combinação de n objectos tomados k à k i.e., $C_k^n = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, temos:

$$C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = 6 \Rightarrow n^2 - n - 12 = 0.$$

Resolvendo esta última equação, temos $n^2 - n - 12 = (n+3)(n-4) = 0 \Rightarrow n = -3 \vee n = 4$. Visto que não podemos ter um número negativo de objectos, então $n = 4$. A resposta certa é **D**.

Considere a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ para responder as questões de 14 a 19.

14. A função anula em:

A: $x = -2 \vee x = -1 \vee x = 0$ B: $x = -2 \vee x = 1 \vee x = 0$ C: $x = 2 \vee x = 1 \vee x = 0$
D: $x = 2 \vee x = -1 \vee x = 0$ E: $x = 2 \vee x = 1$

Resolução : A função anula quando $f(x) = 0$, então

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \vee x = 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \vee x = 0$$

Logo, $x = 2 \vee x = 1 \vee x = 0$. Então, a resposta certa é **C**.

15. Os extremos relativos da função são:

A: $x_{max} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ e $x_{min} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$
B: $x_{min} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$ e $x_{max} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$
C: $x_{max} = \frac{-3+\sqrt{3}}{3}$ e $x_{min} = \frac{-3-\sqrt{3}}{3}$
D: $x_{min} = \frac{-3+\sqrt{3}}{3}$ e $x_{max} = \frac{-3-\sqrt{3}}{3}$
E: $x_{min} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$ e $x_{max} = \frac{-3-\sqrt{3}}{3}$

Resolução : A função atinge extremos relativos nos pontos onde a derivada é nula ou não existe. Visto que o domínio da função dada é $\mathbb{R}$, a sua derivada tambem tem o mesmo domínio. Então bastão os pontos onde a derivada é nula i.e., $f'(x) = 0$. Assim, temos $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0$. Usando a fórmula resolvente, temos $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12$. Então,

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 2 \pm 2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}.$$

Pelo teste da segunda derivada temos: $f''(x) = 6x - 6$.

(a) para $x = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f''\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) = 2(3+\sqrt{3}) - 6 = 2\sqrt{3} > 0$, logo $x = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$ é ponto de mínimo local i.e., $x_{min} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$

(b) para $x = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f''\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) = 2(3-\sqrt{3}) - 6 = -2\sqrt{3} < 0$, logo $x = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$ é ponto de máximo local i.e., $x_{max} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

Desta forma, a resposta certa é alternativa **B**.

16. A função é monótona:

A: crescente em $\left]-\infty, \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$ e decrescente em $\left]\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right[$

B: crescente em $\left]\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right[$ e decrescente em $\left]-\infty, \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$

C: crescente em $\left]-\infty, \dfrac{-3-\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$ e decrescente em $\left]\dfrac{-3-\sqrt{3}}{3}, \dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}\right[$

D: crescente em $\left]\dfrac{-3-\sqrt{3}}{3}, \dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}\right[$ e decrescente em $\left]-\infty, \dfrac{-3-\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$

E: Nenhuma das alternativas anteriores

Reolução : Pelo exercício anterior, $f'(x) = 0$ nos pontos $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$. Construindo a tabela de monotonia temos:

x	$\left]-\infty, \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\right[$	$\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$	$\left]\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right[$	$\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$	$\left]\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	crescente	$f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$	decrescente	$f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$	crescente

Pela tabela, temos que $f(x)$ é crescente em $\left]-\infty, \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$ e decrescente em $\left]\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right[$. Logo, a resposta certa é **A**.

17. O ponto de inflexão da função é:

A: $x = 2$ **B**: $x = -1$ C: $x = 0$ D: $x = -2$ E: $x = 1$

Resolução: Pontos de inflexão são os pontos onde a segunda derivada é nula ou não existe. Neste caso temos $f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$. Logo, a resposta certa é **E**.

• Visto que a segunda derivada tem domínio $\mathbb{R}$, os valores das outras alternativas não anulam a segunda derivada, por exemplo, da alternativa A temos $f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 \neq 0$.

18. A concavidade da função é:

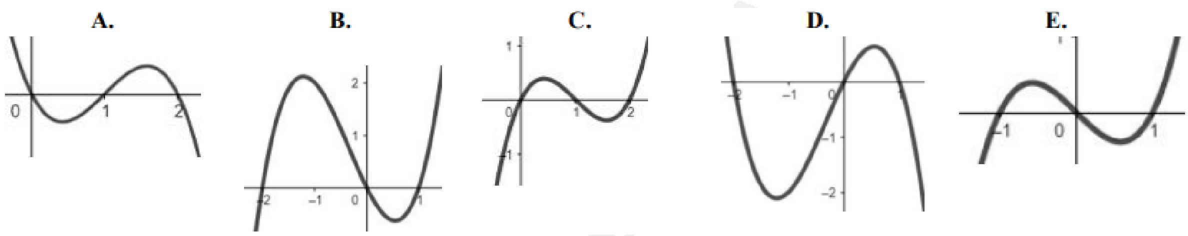
A: Voltada para cima em $]-\infty, 2[$ e voltada para baixo em $]2, +\infty[$
B: Voltada para cima em $]-\infty, -2[$ e voltada para baixo em $]-2, +\infty[$
C: Voltada para cima em $]-\infty, 1[$ e voltada para baixo em $]1, +\infty[$
D: Voltada para cima em $]1, +\infty[$ e voltada para baixo em $]-\infty, 1[$
E: Nenhuma das alternativas anteriores

Resolução: Dado o ponto de inflexão determinado no exercício anterior temos a seguinte tabela:

x	$]-\infty, 1[$	1	$]1, +\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	0	$\cup$

De acordo com a tabela acima, $f(x)$ possui concavidade voltada para cima em $]1, +\infty$ e voltada para baixo em $]-\infty, 1[$. Então a resposta certa é **D**.

19. O gráfico da função é:



Resolução : De acordo com as informações dos exercícios 14 a 18, o único gráfico com as características obtidas nesses exercícios é o gráfico C, i.e., a resposta certa é **C**.

• A alternativa A não está certa pois o gráfico tem concavidade voltada para cima em $]-\infty, 1[$ o que contradiz o exercício 18.

• A alternativa B não está certa pois o gráfico intersecta o eixo dos x no ponto $x = -2$, o que contradiz o exercício 14 e o mesmo acontece com as alternativas D e E.

20. As assímptotas vertical e horizontal da função $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2-1}$ é (são) respectivamente:

A: $x = 1$ e $y = 0$ B: $x = 1 \vee x = -1$ e $y = 0$ C: $x = -1$ e $y = 0$
D: $x = 0$ e $y = -1$ E: $x = 2$ e $y = 0$

Resolução: $x = 1$ diz-se assímptota vertical se pelomenos um dos limites $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ é igual a $+\infty$ ou $-\infty$. Os pontos de x onde a função pode ter problemas de definição são os valores que anulam o denominador, i.e., os pontos para os quais $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.

(a) Para $x = 1$ temos $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = -\dfrac{1}{2}$ o que quer dizer que todos os limites laterais são iguais a $-1/2$, então $x = 1$ não é assíptota vertical

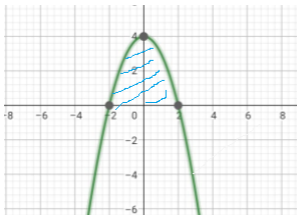
(b) Para $x = -1$ temos $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{1-x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = -\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{1}{x+1} = -\infty$, logo $x = -1$é assíptota vertical.

Por outro lado, $y = b$ é assímptota horizontal se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$. Assim, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x}{x^2-1} = -\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Portanto, $y = 0$ é assímptota horizontal. Então, a resposta certa é **C**.

21. O domínio da função $y = \sqrt{4-x^2}$ é:

A. $-2 < x < 2$ B. $x \leq 2$ C. $-2 \leq x \leq 2$ D. $x \leq -2 \vee x \geq 2$ E. $x < -2 \vee x > 2$

Resolução: O radicando de uma raiz com índice par deve ser não negativo i.e., $4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow (2-x)(2+x) \geq 0$. Resolvendo graficamente esta desigualdade temos:



Com base no gráfico acima temos que o domínio da função dada é $-2 \leq x \leq 2$. Logo, a resposta certa é **C**.

22. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2(x^2-4)}{2-x}$ é:

A. 8 B. 0 C. 6 D. -6 **E.** -8

Resolução: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2(x^2-4)}{2-x} = 2\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{-(x-2)} = -2\lim\limits_{x\to 2}(x+2) = -8$. A resposta certa é **E**.

23. $u_n = \dfrac{n^2+1}{n+3}$ é o termo geral de uma sucessão. Um dos termos desta sucessão é:

A. 0 B. 2 C. 1 D. -3 E. -1

Resolução: Primeiramente vemos que para quaisquer valores naturais de n, os termos desta sucessão nunca serão negativos e nem zero, portanto as alternativas A, D e E não são correctas. Para a alternativa B temos

$$u_n = \frac{n^2+1}{n+3} = 2 \Rightarrow n^2+1 = 2n+6 \Rightarrow n^2-2n-5 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-5) = 24,$$

então $n_{1,2} = \dfrac{2\pm\sqrt{24}}{2}$ em que nenhum deles é números natural, pois $\sqrt{24}$ não é inteiro. Logo a alternativa B não é correcta. Para alternativa C temos

$$u_n = \frac{n^2+1}{n+3} = 1 \Rightarrow n^2+1 = n+3 \Rightarrow n^2-n-2 = 0 \Rightarrow (n+1)(n-2) = 0 \Rightarrow n = 2 \vee n = -1.$$

Apenas $n = 2$ é natural e visto que $u_2 = \frac{2^2+1}{2+3} = 1$, então, a resposta certa é alternativa **C**.

24. O nono termo da sucessão $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n+3}$ é:

A: $\frac{19}{21}$ B: $\frac{65}{21}$ C: $\frac{80}{21}$ D: $\frac{82}{21}$ E: $\frac{10}{21}$

Resolução: Para obter o nono termo basta subistituir o valor de n por 9, i.e., $u_9 = \frac{9^2+1}{2\cdot 9+3} = \frac{82}{21}$. Assim, a resposta certa é **D**.

Considere a sucessão $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots$ para responder as questões $25, 26$ e 27.

25. A sucessão é:

A. Decrescente B. Finita C. Progressão aritmética D. Progressão geométrica E. Crescente

Resolução: Seja u_n o termo geral da sucessão dada. Vejamos que $\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{9} \neq \frac{u_3}{u_2} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{4}{3}} = \frac{15}{16}$, logo não é ua progressão geométrica. Também vemos que $u_2 - u_1 = \frac{4}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{6} \neq u_3 - u_2 = \frac{5}{4} - \frac{4}{3} = -\frac{1}{12}$, logo não é uma progressão aritmética. Por outro lado, a sucessão dada não é finita, pois temos infinitos termos indicados pelas reticências. Para determinar a monotonia, achemos primeiro o termo geral. Para o numerador temos $3, 4, 5, 6, \ldots$ que são números naturais iniciando de 3, isto quer dizer que o termo geral do numerador é $n+2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. De um modo similar temos o termo geral $n+1, n = 1, 2, 3, \ldots$, para o denominador . Assim, $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n+3}{n+2} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n+3)(n+1) - (n+2)^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2+4n+3-n^2-4n-4}{(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0. \end{aligned}$$

Isto quer dizer que a sucessão é decrescente, logo, a resposta certa é **A**.

26. O termo geral da sucessão é:

A. $\dfrac{n}{n+2}$ B. $\dfrac{n+2}{n+1}$ C. $\dfrac{n+1}{n+2}$ D. $\dfrac{n+2}{n}$ E. $\dfrac{n}{n+1}$

Resolução: Com base no exercício anterior temos que o termo geral é $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$. Deste modo, a resposta certa é **B**.

27. O vigésimo quinto termo é:

A: $u_{25} = \dfrac{25}{27}$ B: $u_{25} = \dfrac{27}{26}$ C: $u_{25} = \dfrac{26}{27}$ D: $u_{25} = \dfrac{27}{25}$ E: $u_{25} = \dfrac{25}{26}$

Resolução: $u_{25} = \dfrac{25+2}{25+1} = \dfrac{27}{26}$. Logo, a resposta certa é **B**.

28. A soma dos 9 primeiros termos de uma progressão aritmética é 63 e o segundo termo é -2 o primeiro termo e a diferença são:

A: $a_1 = -5 \wedge d = -3$ B: $a_1 = 5 \wedge d = -2$ C: $a_1 = -5 \wedge d = 3$
D: $a_1 = 5 \wedge d = 3$ E: $a_1 = 2 \wedge d = -3$

Resolução: A soma dos primeiros n termos de uma PA é dada por $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$, então $\frac{(a_1+a_9)\cdot 9}{2} = 63$ e o termo geral de uma PA é $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_1 + d = -2$ e $a_9 = a_1 + 8d \Rightarrow \frac{(a_1+a_1+8d)\cdot 9}{2} = 7 \Rightarrow a_1 + 4d = 7$ Resolvendo o sistema de equações formado pelas equações acima temos:

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 7 \\ a_1 + d = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 4d = 7 \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -5 \\ d = 3. \end{cases}$$

A resposta certa é alternativa **C**.

29. O terceiro e o oitavo termos de uma progressão geométrica são respectivamente 2 e $\frac{1}{16}$. A razão da progressão é:

A: $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ B: $q = -\frac{1}{2}$ C: $q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ D: $q = \frac{1}{2}$ E: $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolução: O termo geral de uma progressão geométrica é $u_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Então,

$$\begin{cases} u_1 \cdot q^2 = u_3 \\ u_1 \cdot q^7 = u_8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^2 = 2 \\ u_1 \cdot q^7 = \frac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^2 = 2 \\ q^5 = \frac{1}{32} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Neste caso temos **D** como alternativa certa.

30. A função $y = g(x)$ tem um máximo local (relativo) em $x = 3$, então:

A: $y = g(x)$ não é derivável em $x = 3$

B: A concavidade da função em $x = 3$ é virada para cima

C: A função é decrescente em $]-\infty, 3[$

D: $g'(3) = -1$

E: O coeficiente angular da recta tangente à curva em $x = 3$ é $a = 0$ ou $y = g(x)$ não é derivável nesse ponto.

Resolução: Quando uma função atinge um extremo local num ponto e ela é derivável nesse ponto, então a derivada da função nesse ponto é nula (coeficiente angular da recta tangente neste ponto é igual a zero) ou não existe. Logo, a resposta certa é **E**.

31. O coeficiente angular da recta r, tangente à uma curva, no ponto de abcissa x_0, é $a = 0$. É falso afirmar que:

A: A recta r não é paralela ao eixo das ordenadas

B: A recta r é paralela ao eixo das abcissas

C: A primeira derivada da função é nula no ponto de abcissa x_0

D: A função não tem um ponto crítico em x_0

E: O sinal da primeira derivada muda em x_0

Resolução: O ponto onde a recta tangente à curva tem coeficiente angular nulo, a primeira derivada da função é nula nesse ponto e os pontos onde a primeira derivada é nula ou não existe chamam-se pontos críticos. Portanto, o ponto em questão é um ponto crítico para a função em questão. Deste modo é falso afirmar que "a função não um ponto crítico em x_0". Logo, a resposta certa é **D**.

32. A primeira derivada da função $y = \frac{(x^2+2)^2}{2x+3}$ é:

A: $\frac{2(x^2+2)(3x^2+6x+2)}{(2x+3)^2}$ B: $\frac{2(x^2+2)(3x^2+6x-2)}{(2x+3)^2}$ C: $\frac{2(x^2+2)(-x^2+2x+1)}{(2x+3)^2}$

D: $\dfrac{2(x^2+2)(3x^2+1)}{(2x+3)^2}$ E: $\dfrac{2(x^2+2)(-x^2+2x+5)}{(2x+3)^2}$

Resolução: Sabe-se que a derivada do quociente $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f'(x)g(x-f(x)g'(x))}{[g(x)]^2}$, temos:

$$\begin{aligned} y' &= \left[\frac{(x^2+2)^2}{2x+3}\right]' = \frac{2(x^2+2)(2x+3)-(x^2+2)^2\cdot 2}{(2x+3)^2} \\ &= \frac{2(x^2+2)(2x+3-x^2-2)}{(2x+3)^2} = \frac{2(x^2+2)(-x^2+2x+1)}{(2x+3)^2}. \end{aligned}$$

Deste modo, a resposta certa é **C**.

33. A segunda derivada de $y = xe^{x^2+1}$ é:

A: $e^{x^2+1}(1+x)$ B: $e^{x^2+1}(1+2x)$ C: $e^{x^2+1}(1+2x^2)$ D: $2xe^{x^2+1}(3+2x^2)$ E: $-xe^{x^2+1}(1+x^2)$

Resolução: Derivando a função dada temos:

$$\begin{aligned} y' &= \left(xe^{x^2+1}\right)' = e^{x^2+1} + 2x^2e^{x^2+1} = e^{x^2+1}(1+2x^2) \\ y'' &= 2xe^{x^2+1}(1+2x^2) + 4xe^{x^2+1} = 2xe^{x^2+1}(3+2x^2). \end{aligned}$$

Então, a resposta certa é **D**.

34. O valor de k que torna a função $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{1-x}, & x \geq -2 \\ k - x^2, & x < -2 \end{cases}$ contínua no ponto $x = -2$ é:

A: 5 B: 3 C: 2 D: -3 E: -5

Resolução: Uma função $f(x)$ é contínua no ponto $x = a$ se $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$. Deste modo,

- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2}(k - x^2) = k - 4$
- $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3}{1-x} = 1$
- $f(-2) = 1.$

Assim temos, $k - 4 = 1 \Rightarrow k = 5$. Então, a resposta certa é **A**.

Dada a função $y = f(x)$ **sabe-se que** $f(4) = 0$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$. **Com base na informação responda às questões de** 35 **a** 37.

35. O $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ é:

A: $+\infty$ B: $-\infty$ C: $\pm\infty$ D: 0 E: Não existe

Resolução: Se o limite de uma função num ponto existe, então ele é único. Por outro lado, se o limite existe então os limites laterais nesse ponto são iguais. No nosso caso, os limites laterais não iguais, logo o limite da função no ponto $x = 3$ não existe. Assim, a resposta certa é **E**.

36. A função tem uma assímptota vertical em:

A: $x = 3$ B: $y = 3$ C: $x = -1$ D: $y = 1$ E: $x = 0$

Resolução: A abcissa $x = a$ diz-se assímptota vertical se pelomenos um dos limites $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ é igual a $+\infty$ ou $-\infty$. No nosso exercício isso acontece com $x = 3$. Portanto, a alternativa certa é **A**.

37. Se $g(x) = \dfrac{1}{x}$, então $g\left(f(4)\right)$ é:

A: $+\infty$ B: $-\infty$ C: $\pm\infty$ D: Não existe E: 0

Resolução: Sabe-se que $f(4) = 0$, então $g(f(4)) = g(0) = \frac{1}{0}$ que simplesmente não existe. Portanto, a alternativa certa é **D**.

38. A integral $\displaystyle\int \left(3x^5 + e^x - \frac{1}{x}\right) dx$ é:

A: $15x^4 + e^x + \dfrac{1}{x^2} + c$ B: $\dfrac{1}{2}x^6 + e^x - \ln|x| + c$ C: $\dfrac{1}{2}x^6 + xe^x - \ln|x| + c$
D: $\dfrac{1}{2}x^6 + xe^x - 1 + c$ E: $\dfrac{1}{2}x^6 + xe^x + \ln|x| + c$

Resolução: Calculando o integral temos:

$$\begin{aligned}\int \left(3x^5 + e^x - \frac{1}{x}\right) dx &= 3\int x^5 dx + \int e^x dx - \int \frac{dx}{x} \\ &= \frac{3x^{5+1}}{5+1} + e^x - \ln|x| + c = \frac{x^6}{2} + e^x - \ln|x| + c.\end{aligned}$$

Logo, a resposta certa é **B**. As outras alternativas não estão correctas porque ao derivar as funções dadas não se obtém a função integrando, por exemplo, derivando a função da opção A temos, $\left(15x^4 + e^x + \frac{1}{x^2} + c\right)' = 60x^3 + e^x - \frac{2}{x^3}$. Claramente esta função é diferente do integrando.

39. A expressão $4i^3 + 3i^2 + 2i + 1$ é equivalente a:

A: $4i + 6$ B: $1 + 2i$ C: $2i - 2$ D: $2 + 2i$ E: $-2i - 2$

Resolução: Sabe-se que $i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$, então

$$4i^3 + 3i^2 + 2i + 1 = 4i \cdot i^2 + 3i^2 + 2i + 1 = -4i - 3 + 2i + 1 = -2i - 2.$$

Logo, a alternativa certa é **E**.

40. A condição para que o número complexo $z = (a-3) + (b-5)i$, onde a e b são números reais, seja um número real não nulo é:

A: $a \neq 3$ B: $b = 5$ C: $b \neq 5 \wedge a \neq 3$ D: $b \neq 5 \wedge a = 3$ E: $b = 5 \wedge a \neq 3$

Resolução: Para que um número complexo seja real e não nulo, a parte real deve ser diferente de zero e a parte imaginária nula i.e., $a - 3 \neq 0 \wedge b - 5 = 0 \Rightarrow a \neq 3 \wedge b = 5$. Logo, a alternativa certa é **E**.

Exame de Matemática II de 2023

Correcção do exame de Matemática II de 2023

1. Considere a seguinte expressão: $|-4|+|\sqrt{2}|-|\sqrt{2}-3|$. O seu valor corresponde a qual das seguintes opções?

   A: -7 B: $7+2\sqrt{2}$ C: 1 D: 7 E: $1+2\sqrt{2}$

   Resolução: Visto que módulo de um número nunca é negativo, temos que $|\sqrt{2}-3| = 3-\sqrt{2}$ visto que $\sqrt{2} < 3$. Então,

   $$|-4|+|\sqrt{2}|-|\sqrt{2}-3| = 4+\sqrt{2}-(3-\sqrt{2}) = 4-3+2\sqrt{2} = 1+2\sqrt{2}.$$

   Logo, a resposta certa é **E**.

2. Indique as soluções da equação $|x^2-2x-1| = x-1$:

   A: $x=-1 \vee x=0$ B: $x=2 \vee x=3$ C: $x=-1 \vee x=2$ D: $x=0 \vee x=3$ E: $x=-2 \vee x=1$

   Resolução: Usando a definição $|y| = a \Leftrightarrow y = a \vee y = -a$, e visto que módulo de um número nunca é negativo, temos o seguinte domínio de existência da expressão acuma: $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$. Assim temos:

   $$\begin{aligned} &|x^2-2x-1| = x-1 \Leftrightarrow x^2-2x-1 = x-1 \vee x^2-2x-1 = -(x-1) \\ &\Rightarrow x^2-3x = 0 \vee x^2-x-2 = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \vee (x-2)(x+1=0) \\ &\Rightarrow x = 0 \vee, x = 3,\ x = 2 \vee x = -1 \end{aligned}$$

   Comparando com os valores do domínio, temos a segunte solução $x = 2 \vee x = 3$. Logo a resposta certa é **B**.

3. Qual o conjunto solução da seguinte inequação $1 \leq |x-3| \leq 2$?

   A: $[1,2]\cup[4,5]$ B: $[-5,4]\cup[-2,1]\cup[1,2]\cup[4,5]$ C: $]-\infty,2]\cup[5,+\infty[$ D: $[2,5]$ E: $[1,2]\cup[5+\infty[$

   Solução: Para resolver esta dupla inequação, temos que achar a solução do sistema de inequações

   $$\left\{\begin{array}{l} |x-3| \geq 1 \\ |x-3| \leq 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-3 \geq 1 \vee x-3 \leq -1 \\ x-3 \leq 2 \wedge x-3 \geq -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geq 4 \vee x \leq 2 \\ x \leq 5 \wedge x \geq 1 \end{array}\right. \Rightarrow$$
   $$\left\{\begin{array}{l} x \in]-\infty,2]\cup[4,+\infty[\\ x \in [1,5] \end{array}\right. \Longrightarrow x \in [1,2]\cup[4,5].$$

   Logo a resposta certa é **A**.

4. Para que valores de a e b a função $f(x) = |x-a| + b$ é simétrica em relação ao eixo dos Y?

   A: $a = 0,\, b \in \mathbb{R}$ B: $a \in]-\infty, 0[,\, b = 0$ C: $a,\, b \in]0, +\infty[$
   D: $a,\, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ E: $a,\, b \in]-\infty, 0[$

   Solução: O valor de b na função dada influencia no deslocamento do gráfico ao longo do eixo Y, enquanto que o valor de a mede o deslocamento do gráfico ao longo do eixo do X. Deste modo, para que o gráfico da função dada seja simétrico em relação ao eixo Y, basta $a = 0$, para quaisquer valores de b. Logo, a resposta certa é **A**.

5. Considere as funções $f(x) = |x|^2 - 4$ e $g(x) = |x^2 - 4|$. Indique a afirmação incorrecta:

   A: Ambas funções têm o mesmo domínio

   B: Ambas funções têm o mesmo contradomínio (**imagem**)

   C: Os zeros de $f(x)$ coincidem com os zeros de $g(x)$

   D: $f(x) \geq 0$ para $x \in \mathbb{R}\backslash]-2, 2[$ e $g(x) \geq 0$ para $x \in \mathbb{R}$

   E: $f(x)$ é crescente em $]0, +\infty[$ e $g(x)$ é crescente em $]-2, 0[\cup]2, +\infty[$

   Resolução: Note que a função $f(x) = |x|^2 - 4 = x^2 - 4$ e $g(x) = |x^2 - 4| = |f(x)|$. Portanto ambas funções tem o mesmo domínio e mesmos zeros de função $x = \pm 2$. Visto que $g(x) = |f(x)|$ então $g(x) \geq 0$ para todos valores de x reais. Por outro lado, o gráfico de $f(x)$ é simétrico em relação ao eixo Y, portanto crescente em $]0, +\infty$ visto que tem concavidade voltada para cima. Consequentemente $g(x) \geq 0$ em $]-2, 0[\cup]2, +\infty[$. Mas elas não têm mesmo conjunto imagem. Assim, a resposta certa é **B**.

6. O número de arranjos de 3 rapazes e 4 raparigas numa fila, se as raparigas tem que ficar juntas é:

   A: $4! \times 4!$ B: $3! \times 4!$ C: $3! \times 2!$ D: $4! \times 4! \times 2!$ E: $3! \times 4! \times 2!$

   Resolução: Visto que as raparigas devem ficar juntas, então temos 4 (3 rapazes e 1 grupo de meninas) objectos pormutar e as 4 raparigas permutam entre si. Daí que o resultado é $4! \times 4!$. Assim, a resposta certa é **A**.

7. De entre 35 alunos de uma turma, de quantos modos difererentes é possível escolher um chefe, um sub-chefe e um secretário.

   A: $C_3^{35} \times 35!$ B: C_3^{35} C: $A_3^{35} \times A_3^{34} \times A_1^{33}$ D: A_3^{35} E: $A_3^{35} \times A_{32}^{35}$

   Resolução: Para escolher um chefe temos 35 possibilidades, 34 possibilidades para um sub-chefe e 33 para um secretário. Assum temos, $35 \cdot 34 \cdot 33 = A_3^{35}$ ou podemos escolher um grupo de 3 pessoas e desses temos 3 possibilidades de escolher um chefe, 2 possiblidades de escolher um sub-chefe e uma para o secretário i.e.,

   $$C_3^{35} \times 3 \cdot 2 \cdot 1 = C_3^{35} \times 3! = \frac{35! \times 3!}{(35-3)!!} = \frac{35!}{(35-3)!} = A_3^{35}$$

   Logo, a resposta certa é **D**.

8. Numa perfumaria quer-se colocar na montra, 3 frascos de perfumes de homem e 5 frascos de perfumes de mulher, escolhidos de cerca de 10 perfumes de homem e 12 perfumes de mulher. De quantas formas se pode formar a fila de perfumes?

   A: $C_3^{10} \times C_5^{12}$ B: $A_3^{10} \times A_5^{11}$ C: $C_3^{10} \times C_5^{12} \times A_8^8$ D: $A_3^{10} \times A_5^{12} \times 8!$ E: $C_3^{10} \times C_5^{12} \times 22$

   Resolução: Para resolver este problema basta escolher 3 frascos de perfumes de homem i.e., C_3^{10}, escolher escolher 5 frascos de perfumes de mulher i.e., C_5^{12}, juntar obtendo 8 frascos e posteriormente permuta-los. Assim,

   $$C_3^{10} \times C_5^{12} \times 8! = C_3^{10} \times C_5^{12} \times A_8^8$$

   Então, a resposta certa é **C**.

9. Considere os acontecimentos **(independentes)** M e N de uma experiência X, tal que $P(M) = 0.2$ e $P(N)) = 0.6$ Qual dos seguintes valores pode ser de **(representa)** $P(M \cup N)$?

A: 0.1 B: 0.4 C: 0.5 D: 0.7 E: 0.9

Resolução: Do estudo de probabilidades sabe-se que $P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N)$ e visto que M e N são eventos independentes, temos

$$\begin{aligned} P(M \cup N) &= P(M) + P(N) - P(M \cap N) = P(M) + P(N) - P(M) \cdot P(N) \\ &= 0.2 + 0.6 - 0.2 \cdot 0.6 = 0, .68 \end{aligned}$$

Logo, a resposta certa é **D**.

10. Sabe-se que num país, a probabilidade de nascer uma rapaz é metade da probabilidade de nascer uma rapariga. A probabilidade de um casal com dois filhos ter dois rapazes é:

A: 1/9 B: 1/4 C: 2/3 D: 1/2 E: 1/3

Resolução: Seja p a probabilidade de nascer uma rapariga, então $p + p/2 = 1 \Rightarrow p = 2/3$. Assim, a probabilidade de nascer um rapaz é $p/2 = (2/3)/2 = 1/3$. Logo, a probabilidade de um casal ter dois rapazes será $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Portanto, a resposta certa é **A**.

11. O coeficiente de x^2 no desenvolvimento do binómio $(2x-3)^5$ é igual a:

A: 1080 B: 540 C: -10 D: -540 E: -1080

Resolução: Para o binómio $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} C_k^n a^k b^{n-k}$, tomando $a = 2x,\ b = -3$ e $n = 5$, temos

$$\begin{aligned} (2x-3)^5 &= \sum_{k=0}^{5} C_k^5 (2x)^k (-3)^{5-k} \\ &= C_0^5(2x)^0(-3)^5 + C_1^5(2x)^1(-3)^4 + C_2^5(2x)^2(-3)^3 \\ &\quad + C_3^5(2x)^3(-3)^2 + C_4^5(2x)^4(-3)^1 + C_5^5(2x)^5(-3)^0 \end{aligned}$$

O termo com x^2 é

$$C_2^5(2x)^2(-3)^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 2^2 \cdot (-3)^3 \cdot x^2 = -1080x^2.$$

Logo, o coeficiente de x^2 é igual a -1080. Portanto, a alternativa certa é **E**.

12. A soma dos primeiro, segundo, penúltimo e último elementos de uma linha do Triângulo de Pascal é 20. Então, o sexto elemento dessa linha é:

A: 84 B: 126 C: 220 D: 278 E. 332

Resolução: O termo geral dos elementos da linha n do Triângulo de pascal é $a_k = C_k^n$. De acordo com os dados disponibilizados, temos

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_{n-1} + a_n &= C_0^n + C_1^n + C_{n-1}^n + C_n^n \\ &= \frac{n!}{(n-0)! \cdot 0!} + \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} + \frac{n!}{(1! \cdot (n-1)!} + \frac{n!}{(n-n)! \cdot n!} \\ &= 1 + n + n + 1 = 2n + 2 = 20. \end{aligned}$$

Assim, $n = 9$. deste modo, o sexto termo é $a_5 = C_5^9 = \frac{9!}{5!(9-5)!} = 126$. Logo, a resposta certa é **B**.

13. Qual dos seguintes conjuntos descreve o domínio da função real de variável real $f(x) = \dfrac{x - log(x)}{x}$?

A: $]-\infty, 1[$ B: $]-\infty, 0[$ C: $]0, +\infty[$ D: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ E: $\mathbb{R} \setminus]-1, 1[$

Resolução : Na função logarítmica, o logaritmando deve ser positivo e numa expressão raccional, o denominador não deve ser nulo. Assim temos que $x > 0$ i.e., $x \in]0, +\infty[$. Logo, a resposta certa é **C**.

14. De uma função quadratica f sabe-se que $(1, 3)$ são as coordenadas do vértice da parábola que a representa gráficamente e que $f(-2) = -4$. Então pode afirmar-se que a função:

A: É par. B: Tem um único zero. C: É injectiva. D: É monótona E: Tem contradomínio $]-\infty, 3]$

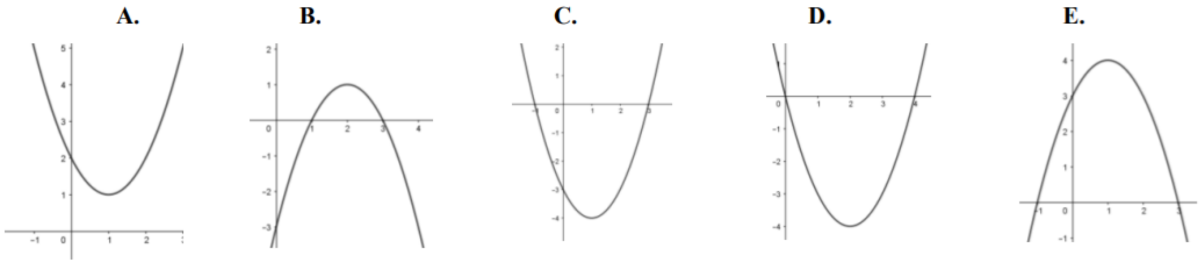
Resolução : Visto que o vértice da parábola é $(1, 3)$ e $f(-2) = -4 < 0$, então a concavidade da parábola está voltada para baixo. Logo, a sua imagem (contradomínio) é $]-\infty, 3]$, a função possui dois zeros, não é par porque não simética em relação ao eixo dos Y e uma função quadráctica com domínio $\mathbb{R}$ não é injectiva. Então, a resposta certa é **E**.

15. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, estritamente crescente. Qual das afirmações pode estar incorrecta?

A: f não pode ter mais que um zero B: A função é injectiva. C: A função não é par
D: $f(x-1) < f(x)$ E: O contradomínio é $\mathbb{R}^+$

Resolução : Visto que f de domínio $\mathbb{R}$ é estritamente crescente, então ela pode ser qualquer coisa declarada nas opções acima, excepto a afirmação altenativa **E** i.e., o contradomínio pode ser $\mathbb{R}$, por exemplo, $f(x) = x$. Logo, a resposta certa é alternativa **E**.

16. Seja dada a função $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Qual dos seguintes gráficos representa esta função:



Reolução : Visto que o coeficiente $a = 1 > 0$, então o gráfico de f tem concavidade voltada para cima. Por outro lado $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$ e o coeficiente $c = -3 \neq 0$ nos informa que f possui dois zeros distintos e $x = 0$ não é um deles. Com esta informação, ficamos apenas com a alternativa **C**, como candidata. Determinando os zeros de f, temos $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \wedge x_2 = -1$. Isto confirma que a resposta certa é **C**.

17. Seja f uma função real de variável real definida por $f(x) = 2^x - 2$. Para um certo número real k, o gráfico da função g, definida por $g(x) = f(x + k)$, passa no ponto das coordenadas $(-4, -3/2)$. Qual é o valor de k?

A: 3 **B**: 2/3 C: 2 D: 5 E: -4

Resolução: Temos que

$$g(-4) = -3/2 \Rightarrow f(-4 + k) = -3/2 \Rightarrow 2^{-4+k} - 2 = -3/2 \Rightarrow 2^{-4+k} = 1/2$$
$$\Rightarrow 2^{-4+k} = 2^{-1} \Rightarrow -4 + k = -1 \Rightarrow k = 3.$$

Logo, a resposta certa é **A**.

18. Considere a função $f(x) = sen(x/2) + 3$. Qual das seguintes opções representa o conjuntos dos zeros de $f(x)$?

A: $\{x \in \mathbb{R} : x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ B: $\{x = \pi/2\}$ C: $\{x = -3\}$ D: $\{x \in \mathbb{R} : x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ E: $\emptyset$

Resolução:São zeros da função os valores reais para os quais $f(x) = 0 \Rightarrow sen(x/2)+3 = 0 \Rightarrow sen(x/2) = -3$. Por ouro lado sabemos que $-1 \leq sen(x/2) \leq 1$, então é impossível que $sen(x/2) = -3$. Logo, a resposta certa é **E**.

19. Sejam f e g funções lineares de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dadas por $f(x) = 2x-3$ e $f(g(x)) = -4x+1$. Nestas condições $g(-1)$ é igual a:

A: -5 B: 0 C: 4 D: 5 E: -4

Resolução : Visto que $f(x) = 2x - 3$ e $f(g(x)) = -4x + 1$, transformando esta última temos $f(g(x)) = -4x+1 = -4x+4-3 = 2(-2x+2)-3$, então $g(x) = -2x+2$. Assim, $g(-1) = -2\cdot(-1)+2 = 4$. Logo, a resposta certa é **C**.

20. Considere a soma $1 + a + a^2 + \ldots + a^{2022}$. O seu valor é dado por:

A: $\dfrac{1+a^{2019}}{2} \times 2022$ B: $\dfrac{1+a^{2022}}{2} \times 2023$ C: $\dfrac{1-a^{2022}}{1-a}$ D: $\dfrac{1-a^{2023}}{1-a}$ E: $\frac{1+a^{2022}}{1-a}$

Resolução: Notemos que estamos perante uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $a_1 = 1$, razão $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$ e temos 2023 termos por somar. Deste modo, a soma dada é $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{2023} = \dfrac{1\cdot(1-a^{2023})}{1-a} = \dfrac{1-a^{2023}}{1-a}$. Então, a resposta certa é **D**.

21. A soma dos termos de uma sucessão aritmética finita é 100 vezes o valor do seu primeiro termo e o último termo é 9 vezes o valor do seu primeiro termo. Quantos termos tem a sucessão?

A. 91 B. 20 C. 15 D. 11 E. 50

Resolução: Seja $\{a_n,\ n = 1, 2, \ldots, N\}$ o termo geral da sucessão em questão. Pelo enunciado, temos que a soma dos seus termos é $S_N = 100a_1$ e $a_N = 9a_1$. Visto que é uma progressão aritmética, o seu termo geral é $a_n = a_1 + (n-1)d$ e $S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$. Suponhamos que $a_1 \neq 0$, então

$$\begin{cases} S_N = \frac{(a_1+a_N)N}{2} = 100a_1 \\ a_N = a_1 + (N-1)d = 9a_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Na_1 + a_1 + Na_N = 200a_1 \\ a_N = 9a_1 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} Na_1 + Na_N = 200a_1 \\ Na_N = 9Na_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Na_1 + 9Na_1 = 200a_1 \\ a_N = 9a_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10Na_1 = 200a_1 \\ a_N = 9a_1 \end{cases} \Rightarrow N = 20.$$

Logo, a resposta certa é **B**.

22. De uma progressão geométrica (u_n) sabe-se que $\dfrac{u_{2022}}{u_{2023}} = \dfrac{1}{2}$ e a soma dos primeiros 5 termos é 93. O décimo termo é:

A. $93 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}$ B. 3×2^{10} C. $5 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{9}$ D. 3×2^{9} E. $\dfrac{93}{5} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{9}$

Resolução: Visto que (u_n) é uma progressão geométrica, então a razão é $q = u_{n+1}/u_n = u_{2023}/u_{2022} = 2$. A soma dos primeiros termos é dada por

$$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_5 = \frac{u_1(1-2^5)}{1-2} = 31u_1 = 93 \Rightarrow u_1 = 3.$$

O termo geral desta progressão é $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow u_{10} = 3 \cdot 2^{10-1} = 3 \cdot 2^9$. Então, a resposta certa é **D**.

23. Os primeiros 3 termos de uma progressão geométrica são $m+2$, m, $2m-3$. Sobre a progressão podemos dizer que:

A. É crescente com $m = 0$.
B. É decrescente com $m = -3$ ou $m = 2$.
C. É crescente com $m = -1$ ou $m = 1$.
D. Não monótona com $m = -2$.
E. Decrescente com $m = -2$ ou $m = 3$.

Resolução: Determinando a razão de u_n, temos

$$q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m}{m+2} = \frac{2m-3}{m} \Rightarrow m^2 = (m+2)(2m-3) \Rightarrow m^2 + m - 6 = 0$$
$$(m-2)(m+3) = 0 \Rightarrow m = 2 \vee m = -3$$

• $m = 2 \Rightarrow q = \frac{1}{2} < 1$, logo a sucessão é decrescente pois $u_1 = 4 > 0$, $0 < q < 1$. que também pode-se notar substituindo o valor de m na sucessão dada para ter $4, 2, 1$ que é uma sucessão decrescente, pois ou $u_{n+1} - u_n < 0$ para $n = 1, 2$.
• Para $m = -3 \Rightarrow q = 3$. Neste caso a sucessão é $-1, -3, -9$ que é decrescente, pois $u_1 = -1 \wedge q = 3 > 0$ ou $u_{n+1} - u_n < 0$ para $n = 1, 2$.

Logo, a sucessão dada é decrescente para $m = 2$ ou $m = -3$. Então, a resposta certa é alternativa **B**.

24. Se $a_k = 3^{-2k}$ $(k \in \mathbb{N})$, então a soma infinita $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ é igual a:

A: 0.1 B: 0.125 C: 0.2 D: 1.125 E: 1.2

Resolução: Para obter a soma requerida, primeiro achemos a soma parcial $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ (visto que é uma progressão geométrica cjujo $q = \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3^{-2(k+1)}}{3^{-2k}} = \frac{1}{9}$ e $a_1 = 3^{-2} = \frac{1}{9}$). Assim,

$$S_n = \frac{\frac{1}{9} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{8} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right).$$

A soma pretendida obtém-se calculando o limite $s = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ i.e.,

$$s = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{8} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right) = \frac{1}{8} = 0.125.$$

Logo, a resposta certa é **B**.

25. Considere as sucessões, representadas pelo seu termo geral a_n $(n \in \mathbb{N})$. **Qual delas é convergente?**

A. $a_n = \dfrac{n^2-4}{n^2}$ B. $a_n = \dfrac{3n^3+5n}{n^2-5}$ C. $a_n = \left(\dfrac{5}{2}\right)^n$ D. $a_n = n^2 - 3$ E. Nenhuma das anteriores.

Resolução: Uma sucessão diz-se convergente se o seu limite existe e é finito. Neste caso a única sucessão com limite finito é a sucessão da alternativa **A**, pois

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-4}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1-4/n^2)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} (1 - 4/n^2) = 1 < \infty.$$

Logo, a resposta certa é **A**.

As alternativas B e C não são corectas porque $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, ora vejamos

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3+5n}{n^2-5} = \lim\limits_{a\to\infty} \dfrac{n^3(3-5/n^2)}{n^2(1-5/n^2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(3-5/n^2)}{1-5/n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n = \infty$ pois $5 > 2$.

26. O valor do limite $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3+n}{n-1}\right)^{2n}$ é:

A. ∞ B. e^3 C. 1 D. 0 E. e^8

Resolução: Calculando o limite temos:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+n}{n-1}\right)^{2n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+n-1+1}{n-1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n-1}+\frac{4}{n-1}\right)^{2(n-1+1)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{n-1}\right)^{n-1}\right]^2\cdot\left(1+\frac{4}{n-1}\right)^2 = (e^4)^2\cdot 1 = e^8.\end{aligned}$$

Deste modo, a resposta certa é **E**.

27. Indique o valor do limite $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-5x^2+4}{x^2+x-2}$:

A: -2 B: 0 C: 1 D: $+\infty$ E: $-\infty$

Resolução: Calculando o limite, temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^4-5x^2+4}{x^2+x-2} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(x^2-4)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)}\\ &= \lim_{x\to 1}(x+1)(x-2) = -2.\end{aligned}$$

Logo, a resposta certa é **A**.

28. Qual o limite, quando $x \to 5$ da função $\dfrac{2x^2-50}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$:

A: $40\sqrt{5}$ B: $25\sqrt{10}$ C: ∞ D: 0 E: $2/5$

Resolução: Calculando o limite, temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-50}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} &= \lim_{x\to 5}\frac{2(x^2-25)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})} = \lim_{x\to 5}\frac{2(x-5)(x+5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{((\sqrt{x})^2-(\sqrt{5})^2)}\\ &= \lim_{x\to 5}\frac{2(x-5)(x+5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{x-5} = \lim_{x\to 5} 2(x+5)(\sqrt{x}+\sqrt{5}) = 40\sqrt{5}.\end{aligned}$$

A resposta certa é alternativa **A**.

29. De uma função $g(x)$, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ existe e que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x^2} = k$, $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Qual poderá ser $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$?

A: 0 B: -1 C: 1 D: ± 2 E: $\pm\infty$

Resolução: Se o limite de uma função for finito (alternativas A, B, C e D), então o limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x^2} = 0$ o que contradiz a hipótese de que $k \neq 0$. Portanto, o $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ ou $-\infty$.

Neste caso temos **E** como alternativa certa.

30. Para certos números reais a e b, é contínua a função $f(x) = \begin{cases} a, & x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}, & 0 < x < 4 \\ b, & x \geq 4 \end{cases}$ Determina a e b.

A: $a = b = 1$ B: $a = 4;\ b = \frac{1}{2}$ C: $a = \frac{1}{4};\ b = 0$ D: $a = \frac{1}{2};\ b = \frac{1}{4}$ E: $a = 0;\ b = 4$

Resolução: A a função dada é contínua em todo $\mathbb{R}$, com excepção talvez dos pontos $x = 0$ e $x = 4$. Para que uma função seja contínua no ponto x_0 e necessário se suficiente que sejam satisfeitas as condições:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Com base nessas condições, iremos determinar as constantes a e b.

- Para o ponto $x = 0$, temos:

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} a = a \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{2} \\ f(0) = a \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{1}{2};$

- Para o ponto $x = 4$, temos:

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} b = b \\ \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4} \\ f(4) = 4 \end{cases} \Rightarrow b = \dfrac{1}{4}.$ Logo, a resposta certa é **D**.

31. Considere a função $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-2}{2}\right)$. Determine a sua derivada.

A: $\dfrac{2x}{x^2-2}$ B: $\dfrac{4x}{x^2-2}$ C: $2x$ D: $\dfrac{2(x-1)}{x^2-2}$ E: $\ln\left(\dfrac{x^2-2}{2x}\right)$

Resolução: Calculando a derivada desta função, temos:

$$f'(x) = \left[\ln\left(\frac{x^2-2}{2}\right)\right]' = \frac{\left(\frac{x^2-2}{2}\right)'}{\frac{x^2-2}{2}} = \frac{\frac{2x}{2}}{\frac{x^2-2}{2}} = \frac{2x}{x^2-2}.$$

Logo, a resposta certa é **A**.

32. Sejam as funções f e g tais que $f(2) = 4,\ f'(2) = -2,\ g(2) = -3,\ g'(2) = 1$. Determine $\left(\dfrac{1}{f+g}\right)'$ no ponto $x = 2$.

A: 0 B: -1 C: 1 D: -2 E: 2

Resolução: Calculando a derivada do quociente, temos:

$$\left(\frac{1}{f(x)+g(x)}\right)' = \frac{1' \cdot [f(x)+g(x)] - 1 \cdot [f(x)+g(x)]'}{[f(x)+g(x)]^2} = -\frac{f'(x)+g'(x)}{[f(x)+g(x)]'}.$$

Então, $\left(\dfrac{1}{f(x)+g(x)}\right)'\Bigg|_{x=2} = -\dfrac{f'(2)+g'(2)}{[f(2)+g(2)]^2} = -\dfrac{-2+1}{(4-3)} = 1.$

Deste modo, a resposta certa é **C**.

33. Considere a função $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ definida em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Determine o(s) ponto(s) do gráfico de f nos quais a recta tangente é é paralela à recta $y = x$.

A: $(0,0)$ B: $(1,-1)$ e $(1,1)$ C: $(0,1)$ D: $(0,0)$ e $(-2,2)$ E: $(1,2)$ e $(2,1)$

Resolução: A recta tangente $y = ax + b$ será paralela à $y = x$ se tiverem o mesmo declive i.e., $a = 1$. O declive da recta tangente à curva num ponto é igual a derivada dessa função nesse ponto. Derivado a função dada temos:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{x'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Então $f'(x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2} = 1 \Rightarrow (x+1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -2.$

Para $x = 0$ temos $y = f(0) = 0$ e para $x = -2$ temos $f(-2) = \frac{-2}{-2+1} = 2$. Assim, os pontos onde as tangentes são paralelas à recta $y = x$ são $(0,0)$ e $(-2,2)$. Então, a resposta certa é **D**.

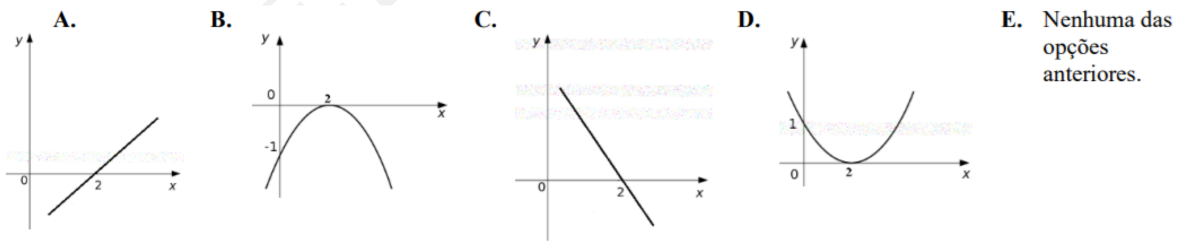
34. Considere a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$. Os seus máximos e mínimos são:

A: Máx. $M(3,3)$; Mín. $P(0,0)$ B: Máx. $M(0,3)$; Mín. $P(2,-1)$ C: Máx. $M(3,0)$ e Mín. $P(2,-1)$
D: Máx. $M(-1,2)$ e Mín. $P(0,3)$ E: Máx. $M(2,-1)$ e Mín. $P(0,3)$

Resolução: Os pontos para os quais a função atinge os seus valores extremais sã aqueles onde a sua derivada anula ou não existe. Deste modo, $f'(x) = 3x^2 - 6x$ e visto que esta derivada é contínua em todo $\mathbb{R}$, então apenas os pontos que anulam $f'(x)$ são ponto críticos. $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$. Usando o teste da segunda derivada, temos $f''(x) = 6x - 6$. Assim,

• Para $x = 0 \Rightarrow f''(0) = -6 < 0$, logo a função atinge um máximo local neste ponto e $f_{max} = f(0) = 3$.
• para $x = 2 \Rightarrow f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0$, logo a função atinge um mínimo local neste ponto e $f_{min} = f(2) = -1$.
Os pontos de máximo e mínimo são respectivamente, Máx. $M(0,3)$ e Mín. $P(2,-1)$. Então, a resposta certa é **B**.

35. Seja $f(x)$ uma função cujo gráfico tem um ponto máximo de abcissa $x = 2$. Qual dos seguintes gráficos poderá representar o da sua primeira derivada?



Resolução: O gráfico da sua primeira derivada deve possuir $x = 2$ como seu zero de função. Visto que $x = 2$ é ponto de máximo, então para $x < 2$ a derivada é positiva e negativa para $x > 2$. O único gráfico com essas características é o da altenativa C. Assim, a resposta certa é **C**.

36. Seja $h(x) = (x^2 - 1)(x + 1)$ função de domínio $\mathbb{R}$. Indique qual das afirmações está correcta?

A: $h(x)$ tem três zeros em $x = -1$, $x = 0$, e $x = 1$

B: $h(x)$ tem um mínimo e não tem máximo

C: $h(x)$ é crescente em todo seu domínio

D: $h(x)$ tem um ponto de inflexão em $x = -3$

E: O gráfico de $h(x)$ apresenta concavidade voltada para cima no intervalo $\left]\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$

Resolução: Facilmente vemos que os pontos que anulam a função dada são $x = -1$, $x = 1$. Então alternativa A não é correcta. Façamos agora o estudo de monotonia e extremos. Derivando a função, temos $h'(x) = 2x(x+1) + 1\cdot(x^2-1) = 2x(x+1) + (x+1)(x-1) = (x+1)[2x+x-1] = (x+1)(3x-1)$.

- Pontos estacionários: $h'(x) = 0 \Rightarrow (x+1)(3x-1) = 0 \Rightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{3}$.
- Monotonia

x	$]-\infty,-1[$	-1	$]-1,\frac{1}{3}[$	$\frac{1}{3}$	$]\frac{1}{3},+\infty[$
$h'(x)$	$-$	0	0	$-$	$+$
$h(x)$	decrescente	0	decrescente	$-\frac{32}{27}$	crescente

- A função é decrescente em $]-\infty, 1/3[$, portanto a alternativa C não é correcta.
- A função possui um mínimo quando $x = \frac{1}{3}$ e não possui máximo, então a alternativa B está certa.
- Pontos de inflexão: Pontos para os quais $h''(x) = 0$ ou não existe. Então, $h''(x) = 1\cdot(3x-1)+3(x+1) = 6x+2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$, logo alternativas D e E não estão certas, pois $x = -3$ não é ponto de inflexão e o intervalo onde a concavidada está voltada para cima é $\left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[\supset \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

Portanto, a alternativa certa é **B**.

37. Considere o número complexo $z = i(i+1)$. Qual o resultado da sua simplificação?

A: $1-i$ B: $i+1$ C: $-2i$ D: $i-1$ E: $-1-i$

Resolução: Sabe-se que $i = \sqrt{-1}$ e $i^2 = -1$, então $z = i(i+1) = i^2 + i = -1 + i = i - 1$. Portanto, a alternativa certa é **D**.

38. Considere a equação $z^3 - 4z^2 + 5z = 0$, onde z pertence ao conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$. Qual dos conjuntos representa as soluções da equação?

A: $\{0, 2+i, 2-i\}$ B: $\{0, i, -i\}$ C: $\emptyset$ D: $\{1+i, -1+i\}$ E: $\{-i, i, -1, 1\}$

Resolução: Resolvendo a equação, temos:

$$z^3 - 4z^2 + 5z = 0 \Rightarrow z(z^2 - 4z + 5) = 0 \Rightarrow z = 0 \vee z^2 - 4z + 5 = 0.$$

Para a equação $z^2 - 4z + 5 = 0$ temos $\Delta = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = -4$. Então $z = \frac{4\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{4\pm 2\sqrt{-1}}{2} = 2 \pm i$. Assim, o conjunto solução é $\{0, 2-i, 2+i\}$

Logo, a resposta certa é **A**.

39. Se $f'(x) = \frac{1}{3} sen\left(\frac{x}{2}\right) + 3x^2$ a derivada de uma função real $f(x)$. Sabendo que $f(0) = 1$, determine a primitiva de $f'(x)$.

A: $f(x) = -\dfrac{2}{3}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) + x^3 + \dfrac{5}{3}$ B: $f(x) = \dfrac{2}{3} sen\left(\dfrac{x}{4}\right) + x^3 + 1$ C: $f(x) = \dfrac{2}{3}\cos\left(\dfrac{x}{4}\right) + x^3 + \dfrac{2}{3}$

D: $f(x) = -\frac{1}{6}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{3x^2}{2}$ E: $f(x) = -\dfrac{2}{3}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) + x^3 + 1$

Resolução: Fazendo a substituiç ao $\frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = 2dt$, então

$$\int sen\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int 2sentdt = -2\cos t + C = -2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + C,$$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \left[\frac{1}{3} sen\left(\frac{x}{2}\right) + 3x^2\right]dx = \frac{1}{3}\int sen\left(\frac{x}{2}\right)dx + 3\int x^2 dx$$

Com apoio do Fundo de Desenvolvimento Instuticional

$$= -\frac{2}{3}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{3x^3}{3} + c = -\frac{2}{3}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + x^3 + c.$$

Usando a condição $f(0) = 1$ temos $1 = -\frac{2}{3}\cos(0) + 0 + c \Rightarrow c = \frac{5}{3}$. Assim, a primitiva de $f'(x)$ que passe pelo ponto dado é $f(x) = -\dfrac{2}{3}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) + x^3 + \dfrac{5}{3}$. Logo, a alternativa certa é **A**.

40. Seja $g(x) = (9x^2)(3x^3 - 2)^6$ a derivada da função $G(x)$ e $c \in \mathbb{R}$. Qual a possível expressão de $G(x)$?

A: $G(x) = (3x^3)(\dfrac{3}{4}x^4 - 2)^6$ B: $G(x) = (3x^3)(3x^3 - 2x)^7$ C: $G(x) = \left(\dfrac{3x^3}{7}\right)(\dfrac{3}{4}x^4 - 2)^7 + c$

D: $G(x) = \frac{1}{7}(3x^3 - 2)^7 + c$ E: $G(x) = (3x^3)(\frac{3}{4}x^4 - 2x)^7 + c$

Resolução: Fazendo a substituição $u = 3x^3 - 2 \Rightarrow du = d(3x^3 - 2) = 9x^2dx$, então

$$\begin{aligned} G(x) &= \int g(x)dx = \int (9x^2)(3x^3 - 2)^6 dx = \int (3x^3 - 2)^6 \cdot 9x^2 dx \\ &= \int (3x^3 - 2)^6 d(3x^3 - 2) = \int u^6 du = \frac{u^7}{7} + c = \frac{1}{7}(3x^3 - 2)^7 + c \end{aligned}$$

Logo, a alternativa certa é **D**.

Exame de Matemática III de 2023

Correcção do exame de Matemática III de 2023

1. Numa escola estudam 203 alunos. Arredondando o número de alunos até centenas, qual é a percentagem do erro relativo desta operação?

   A: 3 B: 2,5 C: 2 D: 1,5 E: 1

   Resolução: Arredondando o número de alunos até centenas teremos 200 alunos. Daí que o erro absoluto desta operação é $|200 - 203| = 3$. Assim, a percentagem desta operação é $p = \frac{3}{203} \times 100\% \approx 1,5\%$. Logo a resposta certa é **D**.

2. No mapa de parede da República de Moçambique no canto inferior direito, está escrito: $1 : 1300000$, o que significa que cada 1 cintímentro do mapa corresponde a 1300000 centímetros de distância real. Neste mapa, a distância de Beira a Tete mede $32,7$ centímetros. Qual é a distância real da Beira à Tete em quilómetros (km), arredondando a resposta a três algarismos significativos.

   A: 400 B: 405 C: 415 D: 425 E: 450

   Resolução: Da escala $1 : 1300000$ temos,

   $$\begin{cases} 1\,cm\ --1300000\,cm \\ 32,7\,cm--x \end{cases} \Rightarrow x = 32,7 \times 1300000\,cm = 42510000\,cm$$

   Visto que 1 metro corresponde a 100 centímetros, temos

   $$\begin{cases} 1\,m\ --100\,cm \\ y--42510000\,cm \end{cases} \Rightarrow y = 42510000/100\,m = 425100\,m$$

   Por outro lado, temos que 1 kilómetro correspode a 1000 metros, então

   $$\begin{cases} 1\,km\ --1000\,m \\ z--425100\,m \end{cases} \Rightarrow z = 425100/1000\,km = 425.1 \approx 425\,km$$

   Logo, a resposta certa é **D**.

3. Do salário mensal deduz-se a parte que se chama Imposto sobre Rendimentos das Pessoas Singulares (IRPS). Qual será o montante de dinheiro (em mil Meticais (Mt)) recebido depois da redução de 17% de Imposto do salário mensal igual a 5 mil Meticais?

   A: 4,15 B: 4,30 C: 4,45 D: 4,70 E: 4,85

Solução: O dinheiro recebido após a dedução do imposto é $5 - 0,17 \times 5 = 5 \times 0,83 = 4,15$ mil Meticais. Logo a resposta certa é **A**.

4. O intervalo do tempo médio estatístico de reacção de um motorista dum carro para começar travagem extra, encontrando de repente um obstáculo no caminho, é de aproximadamente $[1,5; 1,8]$ segundos. Qual é o intervalo de distância (em metros) que passe o carro durante esse intervalo de tempo, se sua velocidade for 60 kilómetros por hora?

A: $[7; 10]$ B: $[11; 17]$ C: $[18; 24]$ D: $[25; 30]$ E: $[31; 43]$

Solução: Visto que $60\,km/h \equiv \frac{60\times 1000\,m}{60\times 60\,s} = \frac{100}{6} = \frac{50}{3}\,m/s$Supondo que o veiculo está em um movimento rectilíneo uniforme, temos $v = s/t \Rightarrow s = vt$. Se $t_0 = 1,5\,s$ e $t_1 = 1,8\,s$ então, $s_0 = \frac{50}{3} \times 1,5 = 25\,m$ e $s_1 = \frac{50}{3} \times 1,8 = 30\,m$. Assim, o intervalo do espaço percorrido no intervalo de tempo $[1,5; 1,8]$ é $[25; 30]$ Logo, a resposta certa é **D**.

5. Uma solução de concentração de sal de 6% foi obtida misturando a solução A de massa de 3 kg e de concentração de 4% com a solução B de massa de 2 kg. Qual é a massa de sal da solução B?

A: $0,2$ B: $0,6$ C: $0,35$ D: $0,2$ E: $0,18$

Resolução: Seja α a percentagem de sal na solução B, então: $0,04 \cdot 3 + \alpha \cdot 2 = 0,06 \cdot 5 \Longrightarrow 2\alpha = 0,18$. Então, a resposta certa é **E**.

6. Um grupo de 5 pessoas querem jogar em voleibol da praia formando as equipas 2 contra 2 jogadores. Quantos jogos com diferentes jogadores nas equipas podem ser realizados?

A: 10 B: 8 C: 12 D: 20 E: 16

Resolução: Suponhamos que temos os jogadores A, B, C, D, E então podemos formar $C_2^5 = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3!}{2!\cdot 3!} = 10$ equipas de forma diferente i.e.,
AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE. Consideremos a seguionte tabela

	AB	AC	AD	AE	BC	BD	BE	CD	CE	DE
AB										
AC										
AD										
AE										
BC			$\surd$	$\surd$						
BD		$\surd$		$\surd$						
BE		$\surd$	$\surd$							
CD	$\surd$			$\surd$			$\surd$			
CE	$\surd$		$\surd$		$\surd$	$\surd$				
DE	$\surd$	$\surd$				$\surd$				

Da tabela acima vemos que temos 16 jogos com jogadores diferentes. A resposta certa é **E**.

7. Quantos jogos m de um campeonato de xadrez devem ser realizados entre 20 pessoas e qual é a probabilidade p de uma pessoa ser vencedora desta prova?

A: $m = 10$; $p = \frac{1}{10}$ B: $m = 190$; $p = \dfrac{1}{20}$ C: $m = 400$; $p = \frac{1}{40}$ D: $m = 200$; $p = \frac{1}{20}$
E: $m = 120$; $p = \frac{1}{40}$

Resolução: O número de jogos a realizar são $C_2^{20} = \dfrac{20!}{(20-2)!2!} = \dfrac{20\cdot 19\cdot 18!}{18!\cdot 2!} = 190$ e a probabilidade de uma pessoa sair vencedora (número de casos favoráveis é 1) é $p = \dfrac{1}{20}$ onde 20 é o número de casos possíveis. Portanto, a resposta certa é **B**.

8. Um caderno custa 120 Meticais, o que em seis vezes é mais caro comparando com o preço duma caneta. O aluno comprou quatro cadernos e umas canetas, pagando 600 Meticais. Quantas canetas comprou o aluno?

A: 4 B: 6 C: 8 D: 10 E: 12

Solução: Sejam n o número de canetas que o aluno comprou ao preço y. Então $6y = 120 \Longrightarrow y = 20$ e $4\cdot 120 + n\cdot y = 600 \Longrightarrow n\cdot 20 = 120 \Longrightarrow n = 6$ canetas. A resposta certa é **B**.

9. A fórmula de conversão da escala Celcius (C) para escala Fahrentheit (F) para medir a temperatura num ambiente é linear F = 1,8C + 32. Sabe-se que 0^oC corresponde a 32^oF e 100^oC corresponde a 212^oF Qual é a emperatura de um ambiente na escala em Fahrentheit se na escala em Celcius o seu valor é 50^o?

A: 87 B: 98 C: 118 D: 122 E: 147

Resolução: Visto que $F = 1,8C + 32 \Rightarrow F = 1,8\times 50 + 32 = 122^oF$. Logo, a resposta certa é **D**.

10. Que ponto do plano cartesiano fica mais próximo à origem do sistema cartesiano, o ponto $A(-2,5)$, $B(-6,-1)$ ou o ponto médio C do segmento AB?

A: A B: B C: C D: tanto A como B E: Nenhuma das anteriores

Resolução: A distância entre dois pontos (x_0,y_0) e (x_1,y_1) é dada por $d = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$, então a distância de A à origem é
$d_A = \sqrt{(0-(-2)^2+(0-5)^2)} = \sqrt{29}$ e a distância de B à origem é $d_B = \sqrt{(0-(-6)^2+(0-(-1))^2)} = \sqrt{37}$. Por outro lado, o ponto médio é $C = \frac{B+A}{2} = (-4,2)$, logo a distância de C à origem é $d_B = \sqrt{(0-(-4))^2+(0-2)^2)} = \sqrt{20}$. Fica mais próximo da origem o ponto cuja distância é menor possível, então, a resposta certa é **C**.

11. Três números $a = \dfrac{1}{\ln\sqrt{5}}$, $b = \dfrac{1}{\ln\sqrt{4}}$ e $c = \frac{1}{\ln\sqrt{3}}$ satisfazem a dupla desigualdade

A: $a<b<c$ B: $c<a<b$ C: $c<q<-b$ D: $c<b<a$ E: $a<c<b$

Resolução: Note que $\ln x = log_e x$ tem base $e>1$, então $\ln\sqrt{3} < \ln\sqrt{4} < \ln\sqrt{5} \Rightarrow \frac{1}{\ln\sqrt{5}} < \frac{1}{\ln\sqrt{4}} < \frac{1}{\ln\sqrt{3}} \Rightarrow a<b<c$. Portanto, a alternativa certa é **A**.

12. Dois números complexos $z = 1+3i$ e $w = 1-3i$ chamam-se:

A: assimétricos B: relativos C: conjugados D: inversos E. Nenhuma das anteriores

Resolução: Dado um número complexo $z = x+iy$, o número complexo $w = x-iy$ chama-se conjugado do número complexo z e denota-se usualmente por $\overline{z}$. Então os números dados são conjugados. Logo, a resposta certa é **C**.

13. soma de três números naturais consecutivos, sendo o primeiro designado por m, é igual a 48. Logo, a equação para calcular o número m é:

A: $6m + 18 = 48$ B: $2(m+2) = 48$ C: $2(2m+1) = 48$ D: $3m + 6 = 48$ E: $3m + 3 = 48$

Resolução : Sendo o primeiro número m então a sucessão do três números consecutivos será m, $m + 1$, $m + 2$. Logo, a soma é $m + m + 1 + m + 2 = 3m + 3 = 48$. Então, a resposta certa é **E**.

14. A soma de todos números da sucessão numérica $2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \ldots$ é:

A: $3,75$ B: 4 C: $4,25$ D: $4,5$ E: ∞

Resolução : A sucessão dada é uma progressão geométrica, visto que se a_n é o seu termo geral, $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$. Então, a soma dos primeiros n termoas é

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} = \frac{2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \Rightarrow \\ s &= \lim_{n\to\infty} s_n = 4 \lim_{n\to\infty}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 4 \end{aligned}$$

Logo, a resposta certa é **B**.

15. O resultado das operações $(A \cup B) \cap C$ sobre os conjuntos numéricos $A =]-1,1[,\ B =]-1,2],\ C =]2,3[$ é o conjunto:

A: $[-1,2]$ B: $[-1,3]$ C: $\{2\}$ D: $]2,3[$ E: $\emptyset$

Resolução : $A \cup B =]-1,1[\cup]-1,2] =]-1,2]$, então $A \cup B \cap C =]-1,2[\cap]2,3] = \emptyset$. Logo, a resposta certa é alternativa **E**.

16. Que fórmula de transformaçẽs dadas $\forall x \in \mathbb{R}$ está errada?

A: $\sqrt{x^2} = x$ B: $sen(\pi - x) = sen\, x$ C: $x = x$
D: $|x - 1| = |1 - x|$ E: $(e^x)^2 = e^{2x}$

Reolução : A única expressão errada é a da alternativa A, pois para $x < 0$ temos $\sqrt{x^2} = x < 0$ o que é um absurdo, dado que a raiz quadrada de um número nunca é negativa. As restantes alternativas possuem expressões correctas, pois é obvio que $x = x$, $(e^x)^2 = e^{2x}$, $|x - 1| = |-(1 - x)| = |1 - x|$ e $sen(\pi - x) = sen\pi \cos(-x) + \cos(\pi) sen(-x) = 0 + senx$. Então, a resposta certa é **A**.

17. O resultado da operação da negação da expressão lógica $(P \to Q) \wedge Q \vee R$ é a expressão:

A: $\neg P$ **B**: $P \wedge R$ C: $\neg Q \wedge \neg R$ D: $\neg P \vee \neg R$ E: $\neg R$

Resolução: A ordem de prioridade dos conectivos é $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$. Assim, temos:

$$(P \to Q) \wedge Q \vee R \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge Q \vee R \Leftrightarrow Q \vee R.$$

Assim, a negação deesta expressão é $\neg Q \wedge \neg R$. A resposta certa é C.

- Neste exercício usamos as leis:

$$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B \text{ lei da implicação}$$
$$(A \vee B) \wedge B \Leftrightarrow B \text{ lei da absorção}$$
$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \text{ lei de Morgan.}$$

18. A probabilidade de num número aleatório de três algarismos, todos serem distintos, é de:

    A: $0,31$ B: $0,45$ C: $0,54$ D: $0,72$ E: $0,83$

    Resolução: A probabilidade é dada como $p = \frac{\text{número den casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$. No nosso caso, o número de casos favoráveis é a quantidade de números de três algarísmos, todos distintos e, o número de casos possíveis é a quantidade de números com três algarísmos.

    Sejam $nF =$número de casos favoráveis e $nP =$número de casos possíveis. Visto que temos 10 dígitos e o primeiro algarísmo não pode ser zero, então, $nF = 9 \cdot 9 \cdot 8$ e $nP = 9 \cdot 10 \cdot 10$. Assim,

    $$p = \frac{nF}{nP} = \frac{9 \cdot 9 \cdot 8}{9 \cdot 10 \cdot 10} = 0,72.$$

    Logo, a resposta certa é **E**.

19. O termo a_1 e a diferença d de uma progressão aritmética cujos termos $a_{21} = 62$ e $a_{31} = 92$, são:

    A: $a_1 = 2;\ d = 5$ B: $a_1 = 2;\ d = 4$ C: $a_1 = 3;\ d = 3$ D: $a_1 = 2;\ d = 3$ E: $a_1 = 3;\ d = 2$

    Resolução : O termo geral de uma progressão aritmética é dada por $a_n = a_1 + (n-1)d$, $n = 1, 2, \ldots$

    $$\begin{cases} a_{21} = 62 \\ a_{31} = 92 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 20d = 62 \\ a_1 + 30d = 92 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 20d = 62 \\ 10d = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 20d = 62 \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 3 \end{cases}$$

    Logo, a resposta certa é **D**.

20. Um viajante andou numa planície 6 kilómetros na direcção do Sol e depois 8 kilómetros na direção de Oeste. A distância recta entre o ponto inicial e o ponto final da viagem é igual à:

    A: $14\,km$ B: $10\,km$ C: $8\,km$ D: $6\,km$ E: $2\,km$

    Resolução: Assumindo que o percurso na direcção do sol e na direcção Oeste formam um ângulo de 90°, a distância pretendida corresponde à hipotenusa de um triângulo rectângulo. Temos:

    $$d^2 = (6km)^2 + (8km)^2 \Longrightarrow d^2 = 36km^2 + 64km^2 = 100km^2 \Longrightarrow d = \sqrt{100km^2} = 10km.$$

    A resposta certa é **B**.

21. A função $h(x) = x^2 - 5x + 1$ definida em $\mathbb{R}$ é:

    A. ímpar B. par C. não é par, nem ímpar D. par para $x < 0$ E. ímpar para $x > 0$

    Resolução: Completando o quadrado perfeito temos,

    $$h(x) = x^2 - 5x + 1 = x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}.$$

    Então $x_v = -\frac{5}{2}$ o que significa que $h(x)$ não é simétrica em relação ao eixo Y, isso torna-a em uma função nõ par, nem ímpar. Logo, a resposta certa é **C**.

22. A função inversa $y = f^{-1}(x)$ de uma função $f(x) = \sqrt{x-2}$ é:

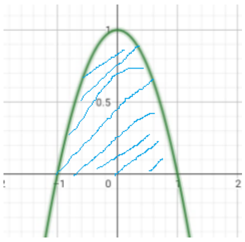
    A. $y = -x^2 + 2$ B. $y = -x^2 - 2$ C. $y = x^2 - 2$ D. $y = x^2 + 2$ E. não existe

    Resolução: Uma função possui inversa se e somente se ela é injectiva e sobrejectiva. Visto que $y = \sqrt{x-2}$ tem como domínio $D(f) = [2, +\infty[$, sejam $x_1, x_2 \in D(f)$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $\sqrt{x_1 - 2} = \sqrt{x_2 - 2} \Leftrightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. O que quer dizer que a função é injectiva. Por outro lado, a função dada tem como Imagem $Im(f) = [0, +\infty[$, então seja $y \in Im(y) \Rightarrow y = \sqrt{x-2} \Rightarrow x = y^2 + 2$, então $\exists x = y^2 + 2 \in D(f)$ tal que $y = f(x)$, logo a função é sobrejectiva. Deste modo, ela possui inversa e $f^{-1}(x) = x^2 + 2$ Logo, a resposta certa é **D**.

23. O domínio Dom da função $f(x)=\sqrt{x-1}\cdot\ln(1-x^2)$ é:

A. $Dom=\mathbb{R}$ B. $Dom=]-1,1]$ C. $Dom=[1,+\infty[$ D. $Dom=\{1\}$ E. $\emptyset$

Resolução: $Dom=\{x\in\mathbb{R}: x-1\geq 0 \wedge 1-x^2>0\}$. Para $1-x^2>0$ temos o gráfico



cuja solução $x\in]-1,1[$. Por outro lado temos $\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0\}=[0,+\infty[$ e fazendo a intersecção com $]-1,1[$ obtemos o domíno dado por $Dom=]-1,1[\cap[1,+\infty[=\emptyset$. Logo, a resposta certa é alternativa **E**.

24. As fórmulas que relacionam a coordenadas x e y, $(x,y\in\mathbb{R})$ de um sistema cartesiano com coordenadas ρ e φ, $(\rho\geq 0,\ \varphi\in[0,2\pi])$ do sistema polar, (as origens destes coincidem e o eixo das abcissas do sistema cartesiano coincide com o eixo polar ρ), são as seguintes: $x=\rho\cos\varphi$ e $y=\rho sen\,\varphi$. Exprima a equação de uma circunferência de raio R, centrada na origem do sistema cartesiano, na forma $\rho=\rho(\varphi)$ no sistema polar.

A: $\rho=R$ B: $\rho=e\pi R$ C: $\rho=\pi R^2$ D: $\rho=2\pi$ E: $\rho=\pi R$

Resolução: E equação da circunferência de raio R e centrada na origem do sistema cartesiano é dada na forma $x^2+y^2=R^2$. Substituindo x e x pelas expressões dadas temos

$$(\rho\cos\varphi)^2+(\rho sen\,\varphi)^2=R^2\Rightarrow\rho^2(\cos^\varphi+sen^2\varphi)=R^2\Rightarrow\rho^2=R^2\Rightarrow\rho=R.$$

Logo, a resposta certa é **A**.

25. O valor do $\lim\limits_{x\to 0}e^t\dfrac{sen2t^2}{tg3t^2}$ é:

A. $\dfrac{9}{4}$ B. $\dfrac{2}{3}$ C. $\dfrac{4}{9}$ D. $\dfrac{3}{2}$ E. ∞

Resolução: Calculando o limite temos:

$$\lim_{t\to 0}e^t\frac{sen2t^2}{tg3t^2}=\lim_{t\to 0}\left(\cos 3t^2\cdot e^t\right)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{sen2t^2}{sen3t^2}=1\cdot\lim_{t\to 0}\frac{2t^2\cdot 3\cdot sen2t^2}{2t^2\cdot 3\cdot sen3t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{3t^2}{2t^2}=\frac{2}{3}.$$

Aqui usamos o limite notável $\lim\limits_{t\to a}\frac{sen\varphi(t)}{\varphi(t)}=1$ sempre que $\lim\limits_{t\to a}\varphi(t)=0$ para obter $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{sen2t^2}{2t^2}=1$ e $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{3t^2}{sen3t^2}=1$. Logo, a resposta certa é **B**.

26. Para que a função $f(x)=\begin{cases}-x^2+x+1 & ;x\in]-\infty,0]\\ e^{x-b} & ;x\in]0,+\infty[\end{cases}$ seja contínua no ponto $x=0$, o parâmetro b deve ser igual a:

A. $-1y$ B. 0 C. 1 D. 2 E. $\forall b\in\mathbb{R}$

Resolução: Para que $f(x)$ seja contínua no ponto $x = a$ é necessário e suficiente que $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$. Então,

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(-x^2 + x + 1) = 1$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{x-b} = e^{-b}$
- $f(0) = 1$

Então, $e^{-b} = 1 \Rightarrow e^{-b} = e^0 \Rightarrow b = 0$. Deste modo, a resposta certa é **B**.

27. Para que valores do parâmetro λ a equação $4^x - 2^{x+1} + \lambda = 0$ tem raizes reais?

A: $\lambda \in [2,3]$ B: $\lambda \in]1,\infty[$ C: $\lambda = 2$ D: $\lambda \in]-\infty,1]$ E: $\lambda \in [4,+\infty[$

Resolução: Fazendo $2^x = \mu$, temos $\mu^2 - 2\mu + \lambda = 0$ e esta equação terá raizes reais se e somente se $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot\lambda = 4 - 4\lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda \leq 1$, então $\lambda \in]-\infty,1]$. Logo, a resposta certa é **D**.

28. Resolvendo a equação $tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = 1$ a resposta, sendo $k \in \mathbb{Z}$, é:

A: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ B: $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ C: $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$
D: $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ E: $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Resolução: Resolvendo a equação, temos:

$$tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

A resposta certa é alternativa **E**.

29. A solução da inequação $\frac{x(x-2)}{x+3} \geq 0$ é o intervalo:

A: $x \in]2,+\infty[$ B: $x \in]-3,2]$ C: $x \in]-\infty,-3[\cup[2,+\infty[$
D: $x \in]-3,0]\cup[2,+\infty[$ E: $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

Resolução: Os valores que anulam o numerador e o denominador são $\{0,2,-3\}$ e o domínio da expressão é $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$. Assim, temos a seguinte tabela

x	$]-\infty,-3[$	-3	$]-3,0[$	0	$]0,2[$	2	$]2,\infty[$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x(x-2)$	$-$	$-$	$-$	0	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x(x-2)}{x+3}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$-$	0	$+$

De acordo com a tabela, a solução do problema é $x \in]-\infty,-3[\cup[2,+\infty[$. Logo, a resposta certa é **C**.

30. Resolvendo a inequação $\sqrt{4-x} < \sqrt{x-2}$ a solução é o intervalo:

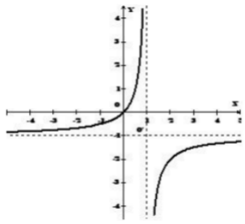
A: $x \in]-2,2[$ B: $x \in [2,4]$ C: $x \in]2,3[$ D: $x \in [3,4]$ E: $x \in]3,4]$

Resolução: Para a existência da inequação dada $4-x \geq 0 \wedge x-2 \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \wedge x \geq 2 \Rightarrow x \in [2,4]$. Por ouro lado,elevando ambo os membros da inequação e sabendo que $x \leq 4 \wedge x \geq 2$, temos

$$(\sqrt{4-x})^2 < (\sqrt{x-2})^2 \Rightarrow 4-x < x-2 \Rightarrow 6 < 2x \Rightarrow x > 3 \Rightarrow x \in]3,+\infty[.$$

Deste modo, a solução é $x \in [2,4] \cap]3,+\infty[=]3,4]$. Logo, a resposta certa é **E**.

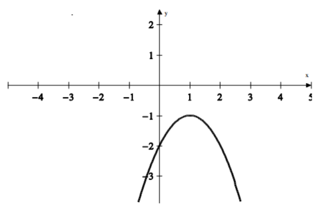
31. A curva, cujo gráfico está representado na figura, tem equação :



A: $y(x) = \frac{2-x}{x-1}$ B: $y(x) = \frac{-x}{x+1}$ C: $y(x) = \frac{x+2}{x+1}$
D: $y(x) = \frac{2-x}{1-x}$ E: $y(x) = \frac{x}{1-x}$

Resolução: Pelo gráfico a curva tem como zero de função $x = 0$ e assímptota vertical $x = 1$, pois $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$ A única expressão com esses dados é da alternativa E i.e., $y = \dfrac{x}{1-x}$. Notemos também que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-x} = -1$ que é a assímptota horizontal apresentada no gráfico. Logo, a resposta certa é **E**.

32. A curva representada geometricamente na figura, tem a seguinte equação:



A: $y(x) = (x-1)^2 - 1$
B: $y(x) = (x-1)^2 + 1$
C: $y(x) = -(x+1)^2 + 1$
D: $y(x) = -(x-1)^2 - 1$
E: $y(x) = -(x+1)^2 - 1$

Resolução: A expressão analítica de uma parábola pode ser dada por $y = a(x - x_v)^2 + y_v$ onde (x_v, y_v) são as coordenadas do vértice. Do gráfico temos que $(x_v, y_v) = (1, -1) \Rightarrow y = a(x-1)^2 - 1$ e $y(0) = -2$, então

$$-2 = a(0-1)^2 - 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow y = -(x-1)^2 - 1.$$ Logo, a resposta certa é **D**.

33. As assintotas verticais A_V, horizontais A_H, oblíquas A_O da função $f(x) = e^T,\ T = \frac{1}{x}$ são:
A. $A_V: x = 1,\ A_H: y = e,\ A_O: y = x+1$
B. $A_V: x = 1,\ A_H: y = 1,\ A_O: y = x$
C. $A_V: x = 0,\ A_H: y = 0,\ A_O:$ não existe
D. $A_V: x = 0,\ A_H: y = 1,\ A_O:$ não existe
E. a função não tem assímptotas

Resolução : Temos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = e^0 = 1,$$

então a recta $y = 1$ é assímptota horizontal.

Para determinarmos a assímptota oblíqua $y = mx + b$, calculamos

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(1/x)}{x} = 0$$

Assim, não existe assímptota oblíqua, pois, esta se reduz em horizontal que determinamos a cima.

Para determinarmos a assímptota vertical, notamos que $x = 0$ não pertence ao domínio de $f(x)$. Assim, calculamos

$$\lim_{x\to 0^+} \exp(1/x) = +\infty.$$

Assim, a recta $x = 0$ é assímptota vertical. A resposta certa é **D**.

34. Seja dada a função $f(x) = -\dfrac{x^3}{12}(4-x)$. Os extremos (máximo ou/e mínimo) locais da função são:

A: $f_{min} = 0$; $f_{max} = 1$ B: $f_{min} = -\dfrac{9}{4}$ C: $f_{min} = 0$ D: $f_{max} = 1$ E: Não há extremos

Resolução: Visto que o domínio da fução é $\mathbb{R}$ que também é o domínio da sua derivada, então os pontos críticos da função são os pontos estacionários i.e., os pontos para os quais a derivada é igual a zero. Assim,

$$f'(x) = -\frac{x^2}{4}(4-x) + \frac{x^3}{12} = -\frac{x^2}{4}\left(4 - \frac{4x}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

Usando o teste da segunda derivada, temos $f''(x) = -\dfrac{x}{2}\left(4 - \dfrac{4x}{3}\right) + \dfrac{2x}{3}$.

• PAra $x = 3$ temos $f''(3) = 2 > 0$, então a função atinge um mínimo local $f_{min} = f(3) = -\frac{9}{4}$.

• Para $x = 0$, $f''(0) = 0$ então o teste da segunda derivada é inconclusivo. Verifiquemos se a primeira derivada muda de sinal ao passar da origem. Para $x < 0$, tomemos por exemplo $x = -1$ então $f'(-1) = -\frac{4}{3} < 0$ e para $x > 0$ tomemos $x = 1$, então $f'(1) = -\frac{2}{3} < 0$. Vemos que a $f'(x)$ não muda de sinal ao passar da origem, portanto $f(x)$ não atinge extremo neste ponto.

Então, a resposta certa é **B**.

35. Considere o sistema linear $\begin{cases} \beta x + 2y &= \beta + 4 \\ 2x + \beta y &= -2. \end{cases}$ Segundo o parâmetro β a afirmação verdadeira é:

A: Se $\beta = 2$ o sistema tem uma e só única solução

B: Se $\beta = -2$ o sistema não tem a solução

C: Se $\beta \neq 2$ e $\beta \neq -2$ o sistema tem mais do que uma solução

D: Se $\beta \neq 2$ e $\beta \neq -2$ o sistema tem uma e só única solução

E: Se $\beta = 2$ o sistema tem mais do que uma solução

Resolução: Usando o método de eliminação de Gauss temos

$$\begin{cases} \beta x + 2y = \beta + 4 \,/\, \times -2 \\ 2x + \beta y = -2 \,/\, \times \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\beta x - 4y = -2\beta - 8 \\ 2\beta x + \beta^2 y = -2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ---- \\ (\beta^2 - 4)y = -4\beta - 8 \end{cases}$$

• se $\beta^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq \pm 2$ o sistema terá única solução
• para $\beta^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \beta = \pm 2$, temos dois casos

(a) se $\beta = 2$ o sistema não tem solução, pois temos para $\beta = 2$ $0 = -16$ o que é impossível;

(b) se $\beta = -2$ o sistema não tem solução tem várias solução pois o sistema reduz-se em apenas uma equação $-2x + 2y = 2 \Rightarrow\Rightarrow y = x + 1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, e a segunda equação anula-se.

Então, a resposta certa é **D**.

36. As rectas no plano cartesiano $y = \frac{1}{2}x + 5$ e $y = kx - b$ são perpendiculares quando:

A: $k = 2,\ b = 5$ B: $k = 2,\ b = -5$ C: $k = -2,\ b \in \mathbb{R}$ D: $k = 1,\ b \in \mathbb{R}$ E: $k = -0,5,\ b \in \mathbb{R}$

Resolução : Os declives das rectas são $a_1 = \frac{1}{2}$ e $a_2 = k$, respectivamente. Usando a condição de perpendicularidade de rectas no plano, teremos:

$$a_1 \cdot a_2 = -1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k = -1 \Rightarrow k = -2.$$

A resposta certa é **D**.

- As outras alternativas estão erradas pois, esboçando os gráficos não teremos rectas perpendiulares.

37. O resultado de multiplicação da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ é:

A: $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ B: $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ C: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ D: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ E: Não existe

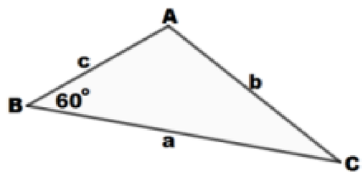
Resolução: A multiplicação de A por B é possível pois o número de colunas dde A é igual ao número de linhas de B e teremos uma matriz $C_{2\times1}$ i.e.e, $A_2 \cdot B_{3\times1} = C_{2\times1}$. Assim, a única alternativa candidata é B. Verifiquemos,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ -1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Logo, a alternativa certa é **B**.

38. No triângulo ABC, o lado $a = 6cm$, o lado $c = 3cm$, o ângulo $\angle B = 60^o$. A medida do lado b é igual à:

A: 5 B: $5\sqrt{3}$ C: 4 D: $3\sqrt{3}$ E: $\sqrt{3}$

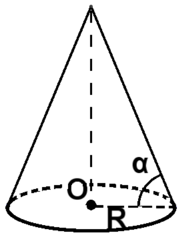


Resolução: Usando o teorema dos cossenos para o triângulo acima, temos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\angle B) \Rightarrow b^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3\cos(60^o) \Rightarrow$$
$$b^2 = 45 - 2 \cdot 18 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow b^2 = 27 \Rightarrow b = 3\sqrt{3}.$$

A resposta certa é **D**.

39. Seja o raio de base dum cone circular é igual a R, a geratriz faz um ângulo $\alpha = 45°$ com a base. Se o ângulo α for aumentado por $15°$, a razão entre o volume final e o volume inicial é:



A: $6\sqrt{3}$ vezes B: $4\sqrt{3}$ vezes C: $2\sqrt{3}$ vezes D: $0,5\sqrt{3}$ vezes E: $\sqrt{3}$ vezes

Resolução : Note que na variação do ângulo, apenas a altura irá variar e raio da base mantém-se constante. Seja altura inicial igual a h_0 e altura final h_f. O volume do cone dado é $V_0 = \frac{1}{3}\pi R^2 h_0$ e o volume final será $V_f = \frac{1}{3}\pi R^2 h_f$. Para $\alpha = 45°$, teremos $\frac{h}{R} = \tan(45°)$ ou seja $h_0 = R$. Quando α aumenta $15°$ teremos $\alpha_f = 60°$, assim $h_f = R\tan(60°) = R\sqrt{3}$. Desta forma,

$$\frac{V_f}{V_0} = \frac{1/3\pi R^2 \cdot h_f}{1/3\pi R^2 \cdot h_0} = \frac{R\sqrt{3}}{R} = \sqrt{3}.$$

Logo, a resposta certa é **E**.

40. A primitiva $F(x)$ da função $f(x) = \sin(3x)$, sendo C uma constante arbitrária é:

A: $F(x) = -\cos(3x) + C$ B: $F(x) = \frac{1}{3}\cos(3x) + C$ C: $F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C$
D: $F(x) = 3\cos(3x) + C$ E: $F(x) = 3\cos x + C$

Rsolução : Temos:

$$F(x) = \int f'(x)dx = \int \sin(3x)dx = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C,$$

onde C é uma constante arbitrária. A resposta é **C**.

Exame de Matemática I de 2024

Correcção do exame de Matemática I de 2024

1. Indique as soluções da inequação : $|x-2| \geq 6$

   A: $x \in]-\infty, 0]$ B: $x = 2$ ou $x = 6$ C: $x \in]-\infty, -4] \cup [8, +\infty[$ D: $x \in [2, 6]$ E: $[1, 2] \cup [5, +\infty[$.

   Resolução: Para $d > 0$ temos:

   $$|x-a| \geq d \Leftrightarrow x - a \geq d \vee x - a \leq -d \ \Rightarrow x \in]-\infty, a-d] \cup [a+d, +\infty[.$$

   Assim,

   $$|x-2| \geq 6 \ \Rightarrow x \in]-\infty, -4] \cup [8, +\infty[.$$

   A resposta certa é **C.**

   - Note que a solução da inequação $|x-2| \geq 6$ é o conjunto de números reais cuja distânca até 2 é maior ou igual a 6. A distância de 0 até 2 é 2, a distância de 2 até 2, é 0. Estes números servem de contra-exemplo para provar que as restantes alternativas não estão correctas.

2. Indique as soluções da equação $|x^2 - x + 1| = 2x - 1$:

   A: $x = -1 \vee x = 1$ B: $x = 0 \vee x = 2$ C: $x = -1 \vee x = 2$ D: $x = 1 \vee x = 2$ E: $x = -2 \vee x = 2$.

   Resolução : A expressão dada tem sentido se $2x - 1 \geq 0 \Longrightarrow x \geq \frac{1}{2}$. Por outro lado, temos:

   $$|x^2 - x + 1| = \begin{cases} x^2 - x + 1, & \text{se } x^2 - x + 1 \geq 0 \\ -(x^2 - x + 1), & \text{se } x^2 - x + 1 < 0. \end{cases}$$

   Assim,

   $$|x^2 - x + 1| = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 = 2x - 1, & \text{se } x^2 - x + 1 \geq 0 \\ -(x^2 - x + 1) = 2x - 1, & \text{se } x^2 - x + 1 < 0. \end{cases}$$

   $$x^2 - 3x + 2 = 0, \quad \text{se } x \in \mathbb{R}$$

   $$(x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = 2.$$

   Ambas soluções são maiores que $1/2$, então a resposta certa é **D.**

   - Note que $x^2 - x + 1 > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, pois, $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 < 0$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4 \cdot 1} = \frac{3}{4} > 0$, logo, $|x^2 - x + 1| = x^2 - x + 1$.

- O módulo de um número é sempre não negativo, logo, o segundo membro da equação deve ser não negativo. Assim, $x = -2$, $x = -1$ e $x = 0$ não satisfazem a equação.

3. A igualdade $-x = |-x|$ é válida para:

   A: $x \in]-\infty, 0]$ B: $x \in]0, +\infty[$ C: $\forall x \in \mathbb{R}$ D: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ E: $\emptyset$

   Resolução : Pela propriedade de módulo, $|-x| = |x|$ que por definição, $|x| = -x$ se $x \leq 0$. Então, a resposta certa é **A.**

   - Note que $x = 1$ não satisfaz a equação $-x = |-x|$ mas $x = -1$ satisfaz.

4. Seja $f(x) = |x-2|$ e $g(x) = x - 2$. Para que valores $f(x) - g(x) = 0$?

   A. $x = -4,\ x = 4$ B. $x = 0$ C. $x \in [-2, 2]$ D. $x \in [2, +\infty[$ E. $x = -2$

   Resolução : Temo,s $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x-2| = x - 2 \Leftrightarrow x - 2 = x - 2 \Leftrightarrow x \geq 2$,

   pois, $|x-2| = x-2$ se e somente se $x - 2 \geq 0$ pela definição de módulo. A resposta certa é **D.**

   - Note que $x = -4$, $x = -2$ e $x = 0$ não são soluções da inequação dada.

5. Seja $|x-2| \leq 5$ e $|y-1| = 1$. Determine o valor máximo de $|x-y|$ se x e y são soluções das expressões acima.

   A. 4 B. 5 C. 3 D. 6 E. 7

   Resolução : Temos:

   $$|x-2| \leq 5 \Rightarrow -5+2 \leq x \leq 5+2 \Rightarrow -3 \leq x \leq 7$$
   $$|y-1| = 1 \Rightarrow y - 1 = 1 \vee y - 1 = -1 \Rightarrow y = 2 \vee y = 0.$$

   Desta forma, o máximo procurdo $\max\{|x-y|,\ x \in [-3,7], y = 0 \vee y = 1\} = 7$, pois, fixando $y = 0$ teremos $|x - 0| = |x| \leq 7$ e se fixarmos $y = 1$, teremos $|x - 1| \leq 6$. O máximo é obtido quando $x = 7$ e $y = 0$. A resposta certa é **E.**

6. Considere a função $f(x) = |x^2 - 4|$. Para que valores de x a função é crescente?

   A. $x \in]-2, 0[\cup]2, +\infty[$ B. $x \in]0, +\infty[$ C. $\forall x \in \mathbb{R}$ D. $x \in [0, 2]$ E. $x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

   Resolução : Temos:

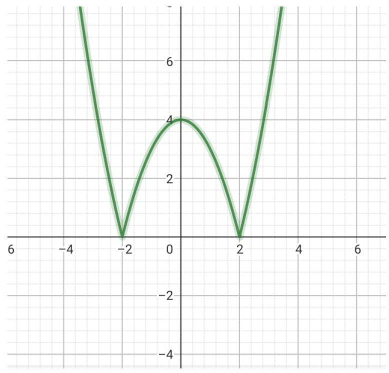
   $$f(x) = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } x^2 - 4 \geq 0 \\ 4 - x^2, & \text{se } x^2 - 4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\\ 4 - x^2, & \text{se } x \in]-2, 2[. \end{cases}$$

   Vamos estudar o sinal da derivada. Temos:

   $$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\\ -2x, & \text{se } x \in]-2, 2[. \end{cases}$$
   $$f'(x) > 0 \Rightarrow x \in]-2, 0[\cup]2, +\infty[.$$

   A resposta certa é **A.**

   Este resultado pode também ser obtido através do esboço do gráfico de $f(x) = |x^2 - 4|$ e posteriormente uma leitua gráfica. O gráfico é:



7. O Paulo e a Luísa vão a um teatro com quatro amigos. Os seis amigos se sentam um ao lado de outro. Qual a probabilidade do Paulo e da Luísa se sentarem juntos:

   A. $\frac{2\times 4!}{6!}$ B. $\frac{4!}{6!}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$ E. $4!\times 2!$

   Resolução : Supomos que Paulo e Luísa se sentam juntos, então eles podem permutar entre si. Desta forma, Paulo e Luisa formam uma figura e juntamente com os restantes 4 colegas, ficando 5 figuras que podem permutar entre si. Assim, o número de casos favoráveis é igual a $2!\cdot 5!$ e o número de casos possíveis é $6!$. Assim, a probabilidade de Paulo e Luísa se sentarem juntos é: $\dfrac{2!\times 5!}{6!}=\dfrac{1}{3}$. Logo, a resposta certa é **C.**

8. Numa caixa com 12 compartimentos, vão arrumar-se 10 copos: 7 amarelos, 1 verde, 1 azul e 1 roxo. Em cada compartimento cabe apenas um copo. De quantas maneiras diferentes se podem arrumar os 10 copos nessa caixa?

   A. $A_7^{12}\times 3!$ B. $C_7^{12}\times A_3^5$ C. $A_7^{12}\times C_3^5$ D. A_3^{35} E. $A_3^{35}\times C_{32}^{35}$

   Resolução : Não interessa a ordem dos copos amarelos entre si, dai o número de possibilidades de arrumar os 7 copos amarelos na caixa é C_7^{12}. Restam 5 espaços vazios para arrumar os 3 copos de cores diferentes. A ordem interessa pois, sempre que trocamos a posição de dois copos será uma arrumação diferente. O total de possibilidades é A_3^5. Assim, o número de possibiliddes pretendido é $C_7^{12}\times A_3^5$. A resposta certa é **B.**

9. De quantas maneiras podem ser escolhidos um presidente e um vice-presidente de entre um grupo de 20 pessoas?

   A: 190 B: 40 C: 400 D: 380 E: 480

   Resolução : Temos, $A_{20}^2=\dfrac{20!}{18!}=20\cdot 19=380$. pois, é um agrupamento em que a ordem importa e é sem reposição. Por exemplo, João presidente e António vice presidente é diferente de António presidente e João vice-presidente. A resposta certa é **D.**

10. Uma empresa pretende oferecer 3 telefones aos seus funcionários, escolhendo aleatoriamente duas mulheres e um homem. Sabendo que na empresa trabalham 50 mulheres e 20 homens de quantas formas podem ser dados os telefones?

    A: $C_3^{70}-C_2^{50}$ B: $C_3^{70}-20$ C: C_2^{50} D: $C_2^{50}\times 20$ E: C_3^{70}

    Resolução : Temos que contar o número de possibilidaades de oferecer telefones a um homens e a duas mulhere. Por fim, devemos multiplicar estes números. Temos, $C_2^{50}\cdot C_1^{20}=C_2^{50}\times 20$. A resposta certa é **D.**

11. Uma linha do Triângulo de Pascal é constituída por todos os elementos da forma C_p^{14}. Escolhido, ao acaso, um elemento dessa linha, qual a probabilidade de ele ser o número 14?

A: $\frac{1}{15}$ B: $\frac{1}{14}$ C: $\frac{2}{15}$ D: $\frac{4}{15}$ E: $\frac{3}{14}$

Resolução: Seja E o evento "saída do número 14". Temos o seguinte espaço de resultados

$$\Omega = \{C_p^{14}: \ p = 0, 1, \ldots, 14\} \Longrightarrow |\Omega| = 15.$$

$$\text{Probabilidade}(E) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíves}} = \frac{2}{15},$$

pois, o número 14 aparece duas vezes, C_1^{14} e C_{13}^{14}, pois $C_1^{14} = C_{13}^{14} = 14$. A resposta certa é **C.**

12. No desenvolvimento do binómio $(x - \frac{a}{x})^6$, o coeficiente do termo x^4 é 12. Qual o valor de a?

A: $\sqrt{15}$ B: 3 C: 1 D: 6 E: -2

Resolução: O termo x^4 é produto de x^5 e $-\frac{a}{x}$, cujo coeficiente é $C_1^6 \cdot (-a) = 12 \Rightarrow -6a = 12 \Rightarrow a = -2$. A resposta certa é **E.**

13. Seja U espaço de resultados de uma experiência aleatória e A e B dois acontecimentos. Sabendo que $P(A) = 0,3$, $P(A \cup B) = 0,7$ e que A e B são incompatíveis, qual o valor de $P(B)$?

A: $0,21$ B: $0,4$ C: $0,6$ D: $0,61$ E: 1

Resolução : Temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B),$$

pois, A e B são incompatíveis ($P(A \cap B) = 0$). Assim,

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0,7 - 0,3 = 0,4.$$

A resposta certa é **B**.

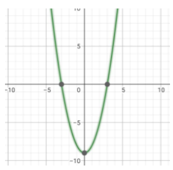
14. Qual dos seguintes conjuntos descreve o domínio da função real de variável real $f(x) = \frac{\sqrt{18-2x^2}}{x^3}$?

A: $[-3, 3]$ B: $[-3, 0[$ C: $]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$ D: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ E: $[-3, 0[\cup]0, 3]$

Resolução : Temos:

$$\begin{aligned}\text{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R}: \ 18 - 2x^2 \geq 0 \land x^3 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: \ 9 - x^2 \geq 0 \land x \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}: \ x^2 - 9 \leq 0 \land x \neq 0\} = [-3, 0[\cup]0, 3[,\end{aligned}$$

pois, o gráfico de $g(x) = x^2 - 9$ é:



A resposta certa é E.

15. O contradomínio da função $f(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$ é:

A: $[-2, 2]$ B: $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ C: $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ D: $[-1, 1]$ E: $\mathbb{R}$

Resolução : Temos, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{2}\cos(x) \leq \dfrac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Na última desigualdade, usamos a propriedade para números reais a, b, se $a < b$ implica para qualquer $c > 0$, $ac < bc$. Desta forma, o contradomínio de $f(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$ é $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. A resposta certa é **B.**

- Note que, por exempo $y = 1$ não pertence ao controdomínio de f, pois, $1 = \frac{1}{2}\cos x$ implica $\cos x = 2$ que não tem solução em $\mathbb{R}$. Desta forma, as alternativas A, D e E não estão correctas.
- Note que $f(\pi) = \frac{1}{2}\cos(\pi) = -\frac{1}{2}$, logo, $y = -\frac{1}{2}$ pertence ao contradomínio. Desta forma, alternativa C não está certa.

16. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{x+1}$. Qual dos pontos pertence ao gráfico de f?

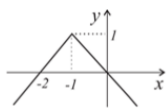
A. $(-1, 0)$ B. $(\ln 2, 2e)$ C. $(\ln 5, 6)$ D. $(-2, e)$ E. $(0, 1)$

Resolução : Tendo em conta a definição de função, isto é, $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é função se $\forall x \in D$, $\exists! y \in \mathbb{R} : y = f(x)$, teremos:

- $x = -1,\ f(-1) = e^{(-1+1)} = e^0 = 1$, então, $(-1, 0)$ não pertence ao gráfico de $f(x)$;
- $x = \ln 2,\ f(\ln 2) = e^{(}\ln 2 + 1) = e^{\ln 2}e = 2e$, então, $(\ln 2, 2e)$ **pertence ao gráfico de** $f(x)$;
- $x = \ln 5,\ f(\ln 5) = e^{(}\ln 5 + 1) = e^{\ln 5}e = 5e$, então, $(\ln 5, 6)$ não pertence ao gráfico de $f(x)$;
- $x = -2,\ f(-2) = e^{-1} = \frac{1}{e}$, então, $(-2, e)$ não pertence ao gráfico de $f(x)$;
- $x = 0,\ f(0) = e^1 = e$, então, $(0, 1)$ não pertence ao gráfico de $f(x)$.

A resposta certa é **B.**

17. O gráfico ao lado representa a função ?
A: $y = 1 - |x - 1|$ B: $y = 1 - |x + 1|$ C: $y = -1 + |x + 1|$
D: $y = -1 + |x - 1|$ E: $y = -1 - |x - 1|$



Resolução : Verifiquemos as principais características. Temos:

- quando $x = -1$, a funcção $y = 1 - |x - 1|$ toma valor -1, o que contradiz com o gráfico dado, logo, esta não é a função do gráfico dado;
- quando $x = -1$, a funcção $y = 1 - |x + 1|$ toma valor 1, os zeros da função são $x = -2$ e $x = 0$, e este grfico pode ser obtido uma translação de $y_1 = |x|$, com os seguntes passos: $y_2 = -|x|$ (o simétrico de y_1), $y_3 = -|x + 1|$ (transladar o gráfico de y_2 uma unidade para a esquerda) e $y = 1 - |x + 1|$ (transladar o gráfico de y_3 uma unidade para cima). **Esta função corresponde ao gráfico dado;**
- quando $x = -1$, a funcção $y = -1 + |x + 1|$ toma valor -1, o que contradiz com o gráfico dado, logo, esta não é a função do gráfico dado;
- quando $x = -1$, a funcção $y = -1 + |x - 1|$ toma valor -1, o que contradiz com o gráfico dado, logo, esta não é a função do gráfico dado;
- quando $x = -1$, a funcção $y = -1 - |x - 1|$ toma valor -3, o que contradiz com o gráfico dado, logo, esta não é a função do gráfico dado.

A resposta certa é **B.**

18. Indique a opção que representa todas as soluções da equação $4x^2 - 4x + 1 = 0$ é:

A: $\frac{1}{2}$ B: $0,\ \frac{1}{2}$ C: $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ D: 1 e 4 E: Não existem soluções válidas

Resolução : Temos, $4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$. A resposta certa é **A.**

- Note que $x = 0,\ x = 1,\ x = 4$ e $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ não satisfazem a equação dada.

19. De entre as seguintes funções , qual aquela que não é injectiva (onde não se encontra indicado $x \in \mathbb{R}$):

A: $y = e^x$ B: $y = \ln(x),\ x > 0$ C: $y = \sin(x)$ D: $y = \frac{1}{x},\ x \neq 0$ E: $y = x^3$.

Resolução : Ua função $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é injectiva se $\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2)$, ou de forma equivalente, $\forall x_1, x_2 \in D,\ f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1 = x_2$. Verifiquemos para cada função. Temos:

- Para $f(x) = e^x,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$, logo, $f(x) = e^x$ é uma função injectiva;
- Para $f(x) = \ln(x)$, tomemos $x_1, x_2 > 0,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow ln(x_1) = ln(x_2) \Rightarrow \ln(x_1) - \ln(x_2) = 0 \Rightarrow \ln(\frac{x_1}{x_2}) = \ln 1,\ \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ logo, $f(x) = \ln(x)$ é uma função injectiva;
- $f(x) = \sin(x)$ não é injectiva, pois, $0 \neq \pi$ mas $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$;
- Para $f(x) = \frac{1}{x}$, sejam $x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0$, tais que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$, logo, $f(x) = \frac{1}{x}$ é uma função injectiva;
- Para $f(x) = x^3$, temos $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow {x_1}^3 = {x_2}^3 \Rightarrow x_1^3 - x_2^3 = 0 \ \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$, logo, $f(x) = x^3$ é uma função injectiva.

A resposta certa é **C.**

20. Considere as funções $f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = x + 1$. A composição $(f \circ g)(x)$ resulta na função:
A: $y = x^2 + 2x - 1$ B: $y = x^2 - 1$ C: $y = x^2 - 2x + 1$ D: $y = x^2$ E: $y = x^2 - x - 1$.
Resolução : Usando a definição de composição de funções, temos:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x + 1)^2 - 2 = x^2 + 2x + 1 - 2 = x^2 + 2x - 1.$$

A resposta certa é **A.**

21. A soma de todos os números naturais ímpares menores que 100 é:
A: 50 B: 495 C: 2450 D: 2500 E: 5500
Resolução : A sucessão em causa é uma progressão aritmética de razão $d = 2$, pois:

$$3 - 1 = 5 - 3 = 7 - 5 = \ldots = 2 = d.$$

Visto que o primeiro termo é 1, o termo geral $a_n = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1$, então a soma pretendida é $s_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. O número de termos a somar é a ordem n do termo 99,

$$99 = 2n - 1 \Rightarrow n = 50 \implies s_{50} = \frac{a_1 + a_{50}}{2} \cdot 50 = 25(1 + 99) = 2500.$$

A resposta certa é **D.**

22. A soma dos 5 primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$ é 211. Indique o 5^o termo da progressão:
A: 16 B: 20 C: 15 D: 105 E: 48
Resolução : Designando a razão por q, o termo geral por a_n e a soma dos primeiros n termos por s_n, teremos:

$$s_5 = a_1 \cdot \frac{1 - q^5}{1 - q} \Leftrightarrow 211 = a_1 \cdot \frac{1 - \frac{2^5}{3^5}}{1 - \frac{2}{3}} \Leftrightarrow a_1 = 3^4 = 81 \implies a_5 = a_1 q^4 = 81 \cdot \frac{2^4}{3^4} = 16.$$

A resposta certa é **A.**

23. A progressão de termo geral $u_n = 2^{-2n}$ é uma progressão:
A: Aritmética de razão 2
B: Aritmética de razão 1/4
C: Geométrica de razão 2
D: Geométrica de razão 1/4
E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Temos $u_n = 2^{-2n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Assim, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ teremos: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{4^{n+1}}}{\frac{1}{4^n}} = \frac{1}{4}$.

Desta forma, u_n é uma pogressão geométrica de razão $q = \frac{1}{4}$. A resposta certa é **D.**

24. Seja (u_n) uma sucessão definida por $u_n = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Quantos termos de ordem ímpar pertencem ao intervalo $[\frac{83}{41}, \frac{67}{33}]$?
A: 1 B: 3 C: 4 D: 5 E: 8

Resolução : Seja n um número ímpar. Então, $n+1$ é par, $(-1)^{n+1} = 1$ e

$$\frac{83}{41} \leq u_n \leq \frac{67}{33} \Rightarrow \frac{83}{41} \leq 2 + \frac{1}{n} \leq \frac{67}{33} \Rightarrow \frac{83}{41} \leq \frac{2n+1}{n}, \frac{2n+1}{n} \leq \frac{67}{33}$$
$$n \leq 41 \wedge n \geq 33 \Rightarrow 33 \leq n \leq 41.$$

O total de números naturais ímpares entre 33 e 41 é 5. A resposta certa é **D.**

25. Em relação à sucessão (u_n) de termo geral $u_n = 3 + \frac{1}{n}$ pode afimar-se que:
A: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ B: u_n é uma sucessão divergente C: u_n é uma sucessão convergente
D: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$ E: u_n é uma sucessão crescente.

Resolução : Temos: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$, logo, u_n é convergente. Analisemos a monotonia. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$u_{n+1} - u_n = 3 + \frac{1}{n+1} - \left(3 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0.$$

Logo, a_n é decrescente. A resposta certa é **D.**

26. O limite, quando $n \to \infty$ da sucessão de termo geral $u_n = \frac{10n+1}{\frac{n}{2}-4}$ é:
A: $\frac{1}{4}$ B: $\frac{1}{2}$ C: 5 D: 10 E: 20

Resolução : Temos:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{10n+1}{\frac{n}{2}-4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(10+\frac{1}{n})}{n(\frac{1}{2}-\frac{4}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{10+\frac{1}{n}}{\frac{1}{2}-\frac{4}{n}} = 20.$$

A resposta certa é **E.**

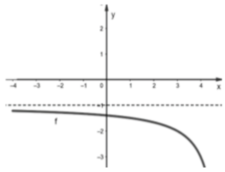
27. O limite, quando $n \to \infty$ da sucessão de termo geral $u_n = 1 + e^{-2n}$ é:
A: $-\infty$ B: 2 C: 1 D: 0 E: $+\infty$

Resolução : Temos:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (1 + e^{-2n}) = \lim_{n\to\infty} (1 + e^{-\infty}) = 1 + 0 = 1.$$

A resposta certa é **C.**

28. A figura representa parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$, sendo $y = 1$ a única assímptota do seu gráfico. Qual o valor de $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{f(x)}$?



A: $-\infty$ B: -3 C: -1 D: 3 E: 0

Resolução : Temos: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{f(x)} = \dfrac{3}{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)} = \dfrac{3}{1} = 3$. A resposta certa é **D.**

29. Para que número real positivo k é contínua a função definida por $f(x) = \begin{cases} \log_2^{(k+x)}, & x \geq 0 \\ \frac{\sin(2x)}{x}, & x < 0? \end{cases}$

A: 0 B: 1 C: 2 D: 3 E: 4

Resolução : Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $x = a$ se $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Claramente $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Determinemos k de tal maneira que f seja contínua também no ponto $x = 0$. Temos:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Longrightarrow \log_2^k = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(2x)}{x} \Rightarrow \log_2^k = 2 \Rightarrow k = 2^2 = 4.$$

A resposta certa é **E.**

30. De uma função h, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que h é par e $\lim\limits_{x\to+\infty}(h(x) - 2x) = 0$. Qual o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$?

A: $-\infty$ B: -2 C: 0 D: 2 E: $+\infty$

Resolução : Pelo facto de $\lim\limits_{x\to+\infty}(h(x) - 2x) = 0$, concluimos que a recta $y = 2x$ é assímptota oblíqua da função $h(x)$. Desta forma, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$. A resposta certa é **E.**

31. Qual o valor de $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-x-12}{16-x^2}$?

A: $-\frac{7}{8}$ B: $-\frac{3}{4}$ C: 1 D: $\frac{5}{3}$ E: 2

Resolução : Substituindo directamente obtemos indeterminação $\frac{0}{0}$. Factorizando e simplificando, teremos

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - x - 12}{16 - x^2} = \lim_{x\to 4} \frac{(x+3)(x-4)}{(4-x)(4+x)} = \lim_{x\to 4} \frac{(x+3)(x-4)}{-(x-4)(4+x)} = \lim_{x\to 4} -\frac{x+3}{4+x} = -\frac{7}{8}.$$

A resposta certa é **A.**

32. De uma função sabe-se que $f(2) = 1$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$. Então:

A. $f(x)$ não tem assímptotas B. $f(x)$ só tem assímptota horizontal C. As assímptotas são $y = 3$ e $x = 2$
D. As assímptotas são $x = 3$ e $y = 2$ E. $f(x)$ só tem assímptota vertical

Resolução : Por definição de $f(x)$, a rescta $x = 2$ é assímpota vertical e a recta $y = 3$ é assímptota horizontal. A resposta certa é **C.**

33. O valor da derivada da função $f(x) = \sin(\pi x)$ o ponto $x = 1$ é:

A: 0 B: -1 C: π D: 1 E: $-\pi$

Resolução : Utilizando derivação por tabela, teremos $f'(x) = \cos(\pi x)(\pi x)' = \pi\cos(\pi x)$. Desta forma, $f'(1) = \pi\cos(\pi) = -\pi$. A resposta certa é **E.**

- Outra idea é usar derivada pela definição no ponto $x = 1$. Temos:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)-\sin(\pi)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi(t+1))}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi t)\cos(\pi)+\cos(\pi t)\sin(\pi)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} -\frac{\sin(\pi t)}{t} = \lim_{t\to 0} -\frac{\pi\sin(\pi t)}{\pi t} = -\pi. \end{aligned}$$

Nesta resolução foram usadas as identidades:

$$t = x-1 \Rightarrow x = t+1,\ x\to 1 \Rightarrow t \to 0$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

34. Indique a equação da recta tangente à $f(x) = xe^{1-x}$ no ponto $x = -1$:

A: $y = (1-x)e^{1-x}$ B: $y = -xe^{x-1}$ C: $y = 2e^{2x} + 3e^2$ D: $y = xe^2$ E: $y = e^2(2x+1)$

Resolução : A equação da recta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $x = x_0$ tem a forma $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Assim, fazendo $f(x) = xe^{1-x}$, $x_0 = -1$, teremos:

$$f'(x) = x'e^{1-x} + x(e^{1-x})' = e^{1-x} - xe^{1-x},\ f'(-1) = e^2 + e^2 = 2e^2,$$
$$y - f(-1) = 2e^2(x+1) \Rightarrow y = -e^2 + 2e^2x + 2e^2 = e^2(2x+1).$$

A resposta certa é **E.**

35. Qual das seguintes funções não possui tangente horizontal no ponto dado:

A: $f(x) = -x^2 - 1,\ x = 0$ B: $f(x) = x^2 - 1,\ x = 1$ C: $f(x) = x^3 - 6x,\ x = \sqrt{2}$

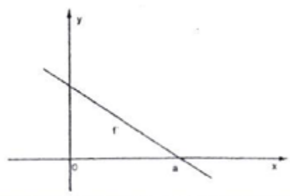
D: $f(x) = \sin(x),\ x = \frac{\pi}{2}$ E: $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2,\ x = 2$

Resolução : Uma função $f(x)$ contínua e com derivada contínua tem tangente horizontal no ponto $x = a$ sse $f'(a) = 0$. Assim,

- para $f(x) = -x^2 - 1,\ x = 0$, temos $f'(x) = -2x,\ f'(0) = 0$;
- para $f(x) = x^2 - 1,\ x = 1$, temos $f'(x) = 2x,\ f'(1) = 2$ **tangente não horizontal**;
- para $f(x) = x^3 - 6x,\ x = \sqrt{2}$, temos $f'(x) = 3x^2 - 6,\ f'(\sqrt{2}) = 0$;
- para $f(x) = \sin(x),\ x = \frac{\pi}{2}$, temos $f'(x) = \cos(x),\ f'(\frac{\pi}{2}) = 0$;
- para $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2,\ x = 2$, temos $f'(x) = x^2 - 2x,\ f'(2) = 0$.

A resposta certa é **B.**

36. A figura representa uma parte do gráfico de f'. Seja $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $f'(a) = 0$. Qual das afirmações é verdadeira:



A. A função f tem um mínimo para $x = 0$;
B. A função f tem um ponto de inflexão para $x = 0$;
C. A função f não apresenta extremos;
D. A função f é crescente em $]0, a[$;
E. A função f é decrescente em $\mathbb{R}$.

Resolução :

- A alternativa A é falsa, pois, $f'(x) > 0$ na vizinhança do ponto $x = 0$, significa que $f(x)$ é crescente nessa vizinhança;
- A alternativa B é falsa, pois, $f'(x)$ não nos dá codições suficientes para a existência de ponto de inflexão ;
- A alternativa C é falsa, pois, $f'(x)$ muda de sinal ao passar pelo ponto $x = a$, significa que $f(x)$ atinge um extremo em $x = a$;
- A alternativa **D** é **verdadeira**, pois, $f'(x) > 0$ no conjunto $]0, a[$;
- A alternativa E é falsa, pois, $f'(x) > 0$, por exemplo, na vizinhança do ponto $x = 0$, significa que $f(x)$ é crescente nessa vizinhança.

A resposta certa é **D.**

37. Seja $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$ uma função de domínio $\mathbb{R}$. Indique qual a afirmação correcta.

A. A função $f(x)$ tem um mínimo em $x = 0$ e um máximo em $x = 2$
B. A função $f(x)$ tem dois máximos em $x = -4$ e $x = 3$
C. A função $f(x)$ é crescente em todo seu domínio
D. A função $f(x)$ não possui extremos
E. A função $f(x)$ é decrescente se $x < 0$ e é crescente se $x > 0$

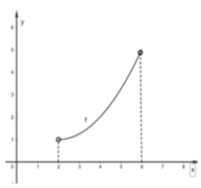
Resolução : Temos: $f'(x) = -3x^2 + 6x$, $f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow -3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$. Desta forma,

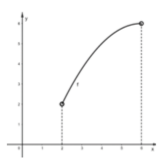
x	$]-\infty, 0[$	0	$]0, 2[$	2	$]2, +\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$f(0) = 4$	$\nearrow$	$f(2) = 0$	$\searrow$

Assim, $f(x)$ atinge um mínimo em $x = 0$ e um máximo em $x = 2$. A resposta certa é **A.**

38. Seja f uma função definida em $]2, 6[$. A função tem primeira e segunda derivadas finitas e $f'(x) > 0$, $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in]2, 6[$. Qual dos gráficos representa a função?

A.

B.

C.

D.


E. Nenhuma das anteriores

Resolução : Das condições $f'(x) > 0$, $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in]2, 6[$ implicam que $f(x)$ é crescente e tem uma concavidade voltada para baixo no intervalo $]2, 6[$. Desta forma, a alternativa D é a única que tem um gráfico com estas condições. A resposta certa é **D.**

39. Seja k um número real e $z = (k-i)(3-2i)$ um número complexo. Qual o valor de k para que a parte real de z seja 0?

A: $\frac{3}{2}$ B: $-\frac{2}{3}$ C: $\frac{2}{3}$ D: $-\frac{3}{2}$ E: 0

Resolução: Vamos escrever z na forma $z = a + ib$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Temos:

$$z = (k-i)(3-2i) = 3k - 3i - 2ki + 2i^2 = 3k - i(3+2k) - 2 = 3k - 2 - i(3+2k).$$

Assim, a parte real de z é $3k-2$. Esta será 0 se e somente se $3k-2=0$ ou seja $k = \frac{2}{3}$. A resposta certa é **C.**

40. Uma das funções que cumprem a condição $f'(x) = 4x^3 + x^2$ é:

A: $f(x) = x^4 + x^3$ B: $f(x) = x^4 + \frac{1}{3}x^3$ C: $f(x) = x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 3$
D: $f(x) = 4x^4 + x^3 + 4$ E: $f(x) = -x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 4$

Resolução: Temos:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \left(4x^3 + x^2\right) dx = x^4 + \frac{1}{3}x^3 + c,$$

onde c é uma constante arbitrária. A resposta certa é **D.**

- Note que ao derivar as funções das restantes alternativas, não encontramos a função $4x^3 + x^2$.

Exame de Matemática II de 2024

Correcção do exame de Matemática II de 2024

1. Por definição $|x|$ é igual a:

   A: x B: $-x$ C: $\begin{cases} x, & \text{se } x > 0 \\ -x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ D: $-x \wedge x$ E: $\begin{cases} -x, & \text{se } x > 0 \\ x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

   Resolução: A resposta certa é **C**.

   - Note que o módulo de um número é o valor absoluto desse número, logo, é sempre não negativo. Assim, $|-2| = 2$, logo as alternativas A e E estão erradas. De modo análogo, $|2| = 2$ mostra que a alaternativa B está errada.

2. O módulo de um número é:

   A: Sempre positivo B: Não pode ser zero C: Pode ser negativo
   D: Sempre positivo ou igual a zero E: É igual a esse número

   Resolução : Usando o número 1, a resposta certa é **D.**

   - Note que $|-2| = 2$, $|2| = 2$ e $|0| = 0$.

3. A diferença entre dois números reais, sendo um deles 3, é 5. Traduzindo matematicamente tem-se:

   A: $|x-5| = 3$ B: $|5-3| = x$ C: $|x-3| = 5$ D: $x - 3 = 5$ E: $x - 5 = 3$

   Resolução : Se considerarmos x como um dos números e o outro sendo 3, a diferença será $x - 3 = 5$ ou $3 - x = 5$, isto é, $|x - 3| = 5$. A resposta certa é **C.**

4. A solução da inequação $|2 - x| \leq 7$ é:

   A. $x \leq 5 \vee x \geq 9$ B. $5 < x < 7$ C. $x \leq 2 \vee x \geq 7$ D. $2 < x < 7$ E. $-5 \leq x \leq 9$

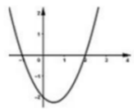
   Resolução : As soluções da inequção $|x - a| \leq d$ é o conjunto de pontos x cuja distância até a é menor ou igual a $d \geq 0$, nos dá a solução $-d + a \leq x \leq d + a$ (pode-se ver na recta graduada). Temos:

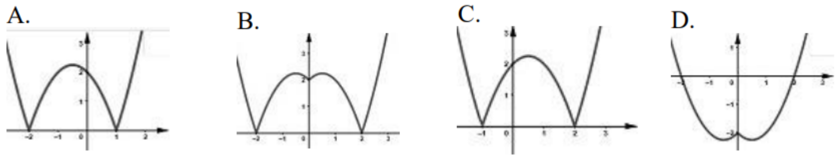
   $$|2 - x| \leq 7 \Leftrightarrow |x - 2| \leq 7 \Leftrightarrow -7 + 2 \leq x \leq 7 + 2 \Rightarrow -5 \leq x \leq 9.$$

   A resposta certa é **E.**

   - Note que zero é solução da inequação dada e serve de contra exemplo para as alternativas B e D.
   - Os números 7 e 3 são soluções da inequação e servem de contra exemplo para as alternativas A e C, respectivamente.

5. No gráfico ao lado está repreentada a função $y = g(x)$. O gráfico que representa $y = |g(x)|$ é:





E. Nenhuma das alternativas anteriores

Resolução : O gráfico que satisfaz $y(x) = |g(x)|$, $\forall x \in \mathbb{R}$ é o da **alternativa C**, pois, a parte negativa do contradomínio de $g(x)$ é considerada o seu simétrico no correspondente gráfico de $|g(x)|$.

- As alternativas A, B e D não são correctas, pois, por exemplo, $g(-1) = 0$, logo, $|g(-1)|$ também tem que ser igual a zero. Mas os gráicos nas alternativas A, B e D $|g(-1)| \neq 0$.

6. ${}^2C_5$ é igual a:

A. 10 B. 20 C. 30 D. 40 E. 50

Resolução : Temos: ${}^pC_n = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$. Desta forma,

$$^2C_5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2!3!} = 10.$$

A resposta certa é **A.**

7. ${}^2A_5$ é igual a:

A. 10 B. 20 C. 30 D. 40 E. 50

Resolução : Temos: ${}^pA_n = \dfrac{n!}{(n-p)!} \Longrightarrow {}^2A_5 = \dfrac{5!}{(5-2)!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20$. A resposta certa é **B.**

8. P_5 é igual a:

A. 110 B. 120 C. 130 D. 140 E. 150

Desta forma,

Resolução : Temos, $P_n = n! \Longrightarrow P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Então a resposta certa é **B.**

9. Entre um grupo de 12 alunos, o professor deve escolher 3 para representar a turma. De quantas formas diferentes poderá ser feita a escolha?

A: ${}^3C_{12}$ B: ${}^3A_{12}$ C: P_{12} D: 4 E: 36

Resolução : Temos, ${}^3C_{12}$ formas diferentes pois, é um agrupamento em que a ordem não importa e é sem reposição. A resposta certa é **A.**

10. De quantas maneiras se pode sentar uma família de 4 membros numa mesa rectangular de 4 lugares?

A: 1 B: 4 C: 12 D: 24 E: 120

Resolução : Temos $P_4 = 4! = 24$. A resposta certa é **D.**

11. A probabilidade de sair um número primo no lançamento de um dado é:

A: $\frac{1}{3}$ B: $\frac{1}{2}$ C: $\frac{1}{6}$ D: $\frac{2}{3}$ E: $\frac{5}{6}$

Resolução: Sendo o espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Longrightarrow |\Omega| = 6$, Seja E o evento "saída de um número primo", então $E = \{2, 3, 5\} \Longrightarrow |E| = 3$. Temos o seguinte espaço de resultados

$$\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

$$\text{Probabilidade}(E) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíves}} = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

A resposta certa é **B.**

- Note que 1 não é número primo.

12.

Nota do teste	10	12	13	14	15
Frequência	8	3	4	2	1

A tabela acima mostra a frequência das notas positivas numa prova de Matemática de uma turma. Os testes com nota positiva foram guardados numa gaveta. O professor tirou ao acaso uma prova. A probabilidade de a nota ser superior a 13 é:

A: $\frac{1}{6}$ B: $\frac{43}{21}$ C: $\frac{7}{18}$ D: $\frac{5}{6}$ E: $\frac{5}{18}$

Resolução: Seja Ω o espaço amostral e E o evento "saída de uma prova com nota superior a 13", então $|\Omega| = 8 + 3 + 4 + 2 + 1 = 18$ e $E = \{14, 14, , 15\}$ pois 14 tem frequência 2. Assim $|E| = 3$. Temos:

$$\text{Probabilidade}(E) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíves}} = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}.$$

A resposta certa é **A.**

13. O termo geral da sucessão $3, \frac{5}{4}, \frac{7}{9}, \frac{9}{16}, \frac{11}{25}, \ldots$ é:

A: $\dfrac{2n-1}{n^2}$ B: $\dfrac{2n+1}{(n+1)^2}$ C: $\dfrac{n+2}{n^2}$ D: $\dfrac{n+1}{n^2}$ E: $\dfrac{2n+1}{n^2}$

Resolução : Os termos da sucessão são:

$$\frac{3}{1}, \frac{5}{4}, \frac{7}{9}, \frac{9}{16}, \frac{11}{25} \ldots$$

que podem ser escritos na forma

$$\frac{2\cdot 1+1}{1^2}, \frac{2\cdot 2+1}{2^2}, \frac{2\cdot 3+1}{3^2}, \frac{2\cdot 4+1}{4^2}, \frac{2\cdot 5+1}{5^2} \ldots$$

Assim, o termo geral é $\frac{2n+1}{n^2}$. A resposta certa é **E.**

- Note que substituindo $n = 1$ e $n = 2$ nos termos gerais dados nas restantes alternativas verificamos imediatamente que nenhum destes correspondem ao termo geral da sucessão dada.

Dada a sucessão $u_n = \frac{2n}{3n+5}$, responda às questões 14 a 18.

14. A ordem do termo $\frac{21}{34}$ é:

A: 22 B: 20 C: 23 D: 21 E: 24

$$\textbf{Resolução :} \text{ Temos: } u_n = \frac{21}{34} \Rightarrow \frac{2n}{3n+5} = \frac{21}{34} \Rightarrow 68n = 63n + 105 \Rightarrow 5n = 105 \Rightarrow n = 21.$$

A resposta certa é **D.**

15. A sucessão é limitada no intervalo:

A: $\frac{1}{4} < u_n < \frac{2}{5}$ B: $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{2}{3}$ C: $\frac{1}{4} \leq u_n < \frac{2}{3}$ D: $\frac{2}{5} < u_n \leq \frac{1}{2}$ E: $\frac{2}{3} < u_n \leq \frac{1}{4}$

Resolução : Devemmos encontrar os números m, M tais que $m < u_n \leq M$, para qualquer n. Temos:

$$u_n = \frac{2n}{3n+5} < \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

De outro lado,

$$u_n = \frac{2n}{3n+5} = \frac{2n}{n(3+\frac{5}{n})} = \frac{2}{3+\frac{5}{n}} \geq \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

pois, a sucessão $\frac{5}{n}$ é decrescente e o seu máximo é 5. Assim, a sucessão $u_n = \dfrac{2}{3+\frac{5}{n}}$ é crescente, pois, a expressão $3+\frac{5}{n}$ decresce e o seu inverso cresce, ou seja, $\dfrac{1}{3+\frac{5}{n}}$ cresce. O mínimo de u_n é o primeiro termo $u_1 = \frac{1}{4}$. A resposta certa é **C.**

16. A sucessão é:

A. Monótona crescente B. Constante C. Alternada D. Monótona decrescente E. Nenhuma das anteriores

Resolução : Temos, $u_n = \dfrac{2n}{3n+5} = \dfrac{2n}{n(3+\frac{5}{n})} = \dfrac{2}{3+\frac{5}{n}}$.

A sucessão $\frac{5}{n}$ é decrescente. Assim, a sucessão $u_n = \frac{2}{3+\frac{5}{n}}$ é crescente, pois, a expressão $3+\frac{5}{n}$ decresce e o seu inverso cresce, ou seja, $\frac{1}{3+\frac{5}{n}}$ cresce. A resposta certa é **A.**

- Note que substituindo $n = 1$, 2 e 3 no termo geral u_n, conclui-se que as alternativas B, C e D não estão correctas.

17. O enésimo primeiro termo da sucessão é:

A: $\frac{2n+1}{3n}$ B: $\frac{2n+2}{3n+3}$ C: $\frac{2n+1}{3n+5}$ D: $\frac{2n+2}{3n+8}$ E: $\frac{2n+2}{3n+5}$

$$\textbf{Resolução :} \text{ Temos: } u_n = \frac{2n}{3n+5} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3(n+1)+5} = \frac{2n+2}{3n+8}. \quad \text{A resposta certa é } \textbf{D.}$$

- Note que $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{4}{11}$ e fazendo $n = 1$, $u_{n+1} = u_2$ que pode também ser calculado usando os termos gerais dados nas alternativas de respostas com $n = 1$. Desta forma, verificamos que as restantes alternativas não estão correctas.

18. $\lim u_n$ é:

A: $\frac{7}{3}$ B: ∞ C: 0 D: $\frac{1}{4}$ E: $\frac{2}{3}$

Resolução : Temos: $\lim u_n = \lim \dfrac{2n}{3n+5} = \lim \dfrac{2n}{n(3+\frac{5}{n})} = \lim \dfrac{2}{3+\frac{5}{n}} = \dfrac{2}{3}$. A resposta certa é **E.**

19. A soma dos dez primeiros termos de uma progressão aritmética é 255. Sabendo que o segundo termo é 8, a diferença e o primeiro termo são:

A: $d = 3 \wedge a_1 = \pm 5$ B: $d = 3 \wedge a_1 = 5$ C: $d = 5 \wedge a_1 = 3$
D: $d = 3 \wedge a_1 = -5$ E: $d = -5 \wedge a_1 = 3$.

Resolução : Seja d a diferença, a_n o termo geral e $s_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ a soma dos primeiros n termos. Temos:

$$s_{10} = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 255, \ a_2 = a_1 + d = 8$$
$$a_1 = 8 - d, \ 2(8-d) + 9d = 51 \Rightarrow 7d = 35 \Rightarrow d = 5, \ a_1 = 8 - 5 = 3.$$

A resposta certa é **C.**

- Note que $a_2 = 8$ e as alternativas A, D e E não satisfazem essa propriedade.

20. Numa Progressão geométrica o quarto termo é -24 e o sétimo -192 . A razão e o primeiro termo são:

A: $q = 2 \wedge a_1 = 3$ B: $q = -2 \wedge a_1 = 3$ C: $q = -2 \wedge a_1 = -3$
D: $q = 2 \wedge a_1 = -3$ E: $q = 2 \wedge a_1 = 4$.

Resolução : Seja q a razão, a_n o termo geral. Usando a fórmula $a_m = a_k q^{m-k}, \ m, k \in \mathbb{N}$, teremos:

$$a_4 = -24, \ a_7 = -192 \Rightarrow a_7 = a_4 q^3 \Rightarrow -192 = -24q^3 \Rightarrow 8 = q^3$$
$$q = 2, \ a_1 = a_4 q^{-3} \Rightarrow a_1 = -24 \cdot 2^{-3} = -3.$$

A resposta certa é **D.**

- Note que o termo geral é $a_n = a_1 q^{n-1}$, substituindo os dados das restantes alternativas, não encontramos os mesmos valores de a_4 e a_7. Desta forma, verificamos que as restantes alternativas não estão correctas.

21. A soma dos termos da sucessão $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots$ é:

A: $\frac{1}{2}$ B: $-\frac{2}{3}$ C: $\frac{1}{6}$ D: $\frac{4}{3}$ E: $\frac{5}{6}$

Resolução : A sucessão em causa é uma progressão geométrica de razão q, pois:

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \ldots = \frac{1}{2} = q.$$

Visto que a razão $q < 1$, então

$$s = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4}{3},$$

onde a_1 é o primeiro termo. A resposta certa é **D.**

- Note que todos os termos são positivos. A soma de números positivos é positiva. Assim, a alternativa B não está correcta. Além disso, as alternativas A, C e E não estão correctas, pois, somando os dois primeiros termos, obtemos 1 que é superior a qualquer dos números proposto em cada uma destas alternativas.

22. O $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$ é:

A: $-\frac{1}{4}$ B: $\frac{1}{4}$ C: ∞ D: $-\infty$ E: 1

Resolução : Temos:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to -2} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1}{4}.$$

A resposta certa é **B.**

23. O $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-\sqrt{x}+2}{2x}$ é:

A: $-\infty$ B: $+\infty$ C: $\frac{1}{2}$ D: 1 E: 0

Resolução : Temos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sqrt{x}+2}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x}\sqrt{x}+\frac{2}{x})}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x}}{2} = \frac{1}{2},$$

pois, $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$, $\frac{2}{x} \to 0$ quando $x \to \infty$. A resposta certa é **C.**

24. A primeira derivada de $y = (3x^2-4x)^2$ é:

A: $y' = 2(3x^2-4x)$ B: $y' = 6(3x^2-4x)(x-2)$ C: $y' = 4(3x^2-4x)(3x-2)$
D: $y' = 2(3x^2-4x)(2x^2-4)$ E: $y' = 3(3x^2-4x)(6x-4)$

Resolução : Usando a fórmula $(u^n)' = nu^{n-1}u'$, teremos:

$$y' = 2(3x^2-4x)(3x^2-4x)' = 2(3x^2-4x)(6x-4) = 4(3x^2-4x)(3x-2).$$

A resposta certa é **C.**

25. Os extremos da função $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ são:

A: $x_{\min} = 1 \wedge x_{\max} = 2$ B: $x_{\min} = 2 \wedge x_{\max} = 1$ C: $x_{\min} = -2 \wedge x_{\max} = 2$
D: $x_{\min} = \pm 2$ E: $x_{\min} = 2 \wedge x_{\max} = -2$.

Resolução : Temos:

$$y' = x^2 - 4 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2.$$

x		-2		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	f(-2)	$\searrow$	f(2)	$\nearrow$

A resposta certa é **E.**

26. A função $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & x \neq 1 \\ a^2 - 6, & x = 1 \end{cases}$ é contínua se:

A: $a = 2$ B: $a = -2$ C: $a = 0$ D: $a = 1$ E: $a = \pm 2$

Resolução : O único ponto que suscita dúvida quanto à continuidade de $f(x)$ é $x = 1$. Verfiquemos a condição de continuidade neste ponto. Temos:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) \Longleftrightarrow -2 = a^2 - 6 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2..$$

Assim, a resposta certa é **E.**

27. A recta $y = -5x - 1$ é tangente à curva $f(x) = x^2 - 3x$ no ponto (-1,4), então $f'(-1)$ é igual a:

A: -5 B: -3 C: -1 D: 0 E: 1

Resolução : A equação da tangente à curva $y = f(x)$ no ponto (x_0, y_0) tem a forma

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Assim, $x_0 = -1$, $y_0 = 4$, a recta tangente é $y = f'(-1)(x+1)+4 = -5x-1$. Desta forma, $f'(-1) = -5$. A resposta certa é **A.**

Seja $g(x) = \frac{-6+x}{3-x}$. Responda as questões de 28 a 30.

28. O domínio da função $g(x)$ é:

A: $x = 3$ B: $x = -3$ C: $x \neq 3$ D: $x \neq -3$ E: $x = 2$

Resolução : Temos, $\text{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} : \ x - 3 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq 3\}$. A resposta certa é **C.**

29. $g(x) = 2$ se:

A: $x = -4$ B: $x = 0$ C: $x = 3$ D: $x = 4$ E: $x > 3$

Resolução : Temos: $\dfrac{-6+x}{3-x} = 2 \Rightarrow x - 6 = 2(3-x) \Rightarrow x - 6 = 6 - 2x \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$. A resposta certa é **D.**

30. A primeira derivada de $g(x)$ é:

A: $\frac{-2x-3}{(3-x)^2}$ B: $\frac{-1}{(3-x)^2}$ C: $\frac{-2x+9}{(3-x)^2}$ D: $\frac{-3}{(3-x)^2}$ E: $\frac{3}{(3-x)^2}$

Resolução : Usando a fórmula

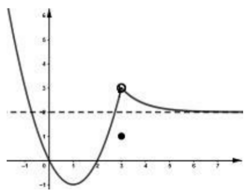
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \ u = u(x), \ v = v(x),$$

teremos:

$$\left(\frac{-6+x}{3-x}\right)' = \frac{(-6+x)'(3-x) - (3-x)'(-6+x)}{(3-x)^2} = \frac{3 - x + x - 6}{(3-x)^2} = \frac{-3}{(3-x)^2}.$$

A resposta certa é **D.**

Com base no gráfico responda as questões de 31 a 34



31. A função possui/é:

A. Contínua em $\mathbb{R}$
B. Descontinuidade do tipo salto da primeira espécie em $x = 3$
C. Descontinuidade do tipo salto da segunda espécie em $x = 3$
D. Descontinuidade eliminável em $y = 2$
E. Descontinuidade eliminável em $x = 3$

Resolução : Quanto à continuidade, vemos que $f(3) \neq \lim\limits_{x\to 3} f(x)$, logo a função é descontínua em $x = 3$. Contudo, os limites laterais no ponto $x = 3$ são finitos e iguais. Logo, a descontinuidade é eliminável.

A resposta certa é **E.**

32. A função é monótona decrescente:

A. Apenas em $]-\infty, 1[$ B. $]-\infty, 1]\cup]3, +\infty[$ C. $]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$
D. $]-\infty, 1[\cup[3, +\infty[$ E. Nenhuma das anteriores

Resolução : Temos:

x	$]-\infty, 1[$	1	$]1, 3[$	3	$]3, +\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$		$\searrow$

Assim, f é de decrescente em $]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$. A resposta certa é **C.**

33. É <u>falso</u> dizer que:
A: Os zeros da função são $x = 0 \wedge x = 2$;
B: A função tem uma assímptota horizontal;
C: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
D: A função tem um mínimo relativo em $x = 1$;
E: O coeficiente angular da recta tangente à curva em $x = -1$ é negativo.

Resolução : Pelo gráfico temos:

- zeros da função são $x = 0$ e $x = 2$;
- a recta $y = 2$ é assímptota horizontal;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$;
- a função tem um mínimo relativo quando $x = 1$;
- o coeficiente angular da recta tangente à curva em $x = -1$ é negativo, pois, a derivada desta função é negativa neste ponto.

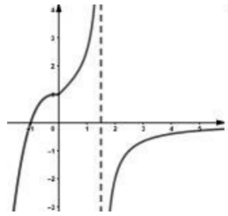
Assim, é falso que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. A resposta certa é **C.**

34. Em $x = 3$:

A: A função é contínua B: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$; C: A função não está definida
D: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$; E: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 3$.

Resolução : Pelo gráfico, a função é descontínua em $x = 3$ e $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 3$. A resposta certa é **E.**

Na figura está representada a função $y = h(x)$. Responda as questões de 35 a 38.



35. As assímptotas são:

A: Ah: $x = -1,5$ Av: $y = 0$ B: Ah: $x = 0$ Av: $y = 0$ C: Ah: $x = 0$ Av: $y = 1,5$ D: Ah: $x = 0$ Av: $y = -1,5$ E: Ah: $x = 1,5$ Av: $y = 0$

Resolução : Temos:

$$\lim_{x \to 1,5^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Então, $x = 1,5$ é assímptota vertical e $y = 0$ é assímptota horizontal. A resposta certa é **E.**

36. O valor de $h \circ h(-1)$ é:

A: 0 B: 1 C: $1,5$ D: $+\infty$ E: $-\infty$

Resolução : Temos: $h \circ h(-1) = h(h(-1)) = h(0) = 1$, pois, $h(-1) = 0$. A resposta certa é **B.**

37. É verdade que:

A: $\lim\limits_{x \to 1,5^-} f(x) = +\infty$ B: $\lim\limits_{x \to 1,5^+} f(x) = +\infty$ C: $\lim\limits_{x \to 1,5^-} f(x) = -\infty$
D: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ E: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$

Resolução : Do gráfico temos: $\lim\limits_{x \to 1,5^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1,5^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

A resposta certa é **A.**

38. A função tem um ponto de inflexão em:

A: $x = 1$ B: $x = 1,5 \wedge x = -1$ C: $y = 0$ D: $y = 1,5$ E: $x = 0 \wedge x = 1,5$

Resolução: Ponto de inlexão é onde o gráfico da função muda de concavidade (neste ponto, $f''(x) = 0$ ou não existe). O gráfico muda de concavidade em $x = 0$ e em $x = 1,5$. Desta forma, a função tem pontos de inflexão em $x = 0$ e $x = 1,5$. A resposta certa é **E.**

39. A primitiva de $y = x^2 - \frac{1}{x}$ é:

A: $y = x^3 - \frac{1}{x^2}$ B: $y = x^3 - \ln x$ C: $y = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x^2}$ D: $y = \frac{x^3}{3} - \ln x$ E: $y = 2x - \frac{1}{x^2}$

Resolução: Temos:

$$\int \left(x^2 - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \ln |x| + c,$$

onde c é uma constante arbitrária. A resposta certa é **D.**

- Note que ao derivar as funções das restantes alternativas, não encontramos a função $x^2 - \frac{1}{x}$.

40. O(s) valor(es) de k que torna(m) o número complexo $z = k + (k^2 - 1)i$ num número real é (são):

A: $k \in \mathbb{R}$ B: $k = 1$ C: $k \in \mathbb{R}^+$ D: $k = \pm 1$ E: $k = -1$

Resolução: Temos: $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 1$. A resposta certa é **D**.

Exame de Matemática II de 2025

Correcção do exame de Matemática II de 2025

1. O módulo de um número:

   A: É igual ao próprio número
   B: É igual ao seu simétrico.
   C: É sempre positivo.
   D: É igual ao próprio número quando é negativo.
   E: É sempre positivo ou igual a zero.

   Resolução: Pela definição do módulo de um número temos que $|x| = x$ se $x > 0$, $|x| = -x > 0$ se $x < 0$ e $|x| = 0$ se $x = 0$. Portanto, vemos que o módulo de um número é sempre positivo ou é igual a zero. Logo a resposta certa é **E**.

2. Dois números distam entre si 7 unidades, sendo um deles 4. Simbolicamente é equivalente à:

   A: $7 - 4$ B: $|7 - 4|$ C: $4 - 7$ D: $|x - 4| = 7$ E: $|x - 7| = 4$

   Solução: Dados dois números x e y. A distância que lhes separa é dada por $|x - y|$ e neste caso é igual a 7, então $|x - y| = 7$. Sendo um deles, digamos $y = 4$, então $|x - 4| = 7$. Logo a resposta certa é **D**.

3. $|x| \leq 3$ se:

   A: $-3 < x < 3$ **B:** $-3 < x \leq 3$ **C:** $-3 \leq x < 3$ **D:** $-3 \leq x \leq 3$ **E:** $x \leq -3 \vee x \geq 3$

   Resolução: Sabe-se que $|x| \leq 3 \iff x \leq 3 \wedge -x \leq 3 \iff x \leq 3 \wedge x \geq -3 \iff -3 \leq x \leq 3$. Logo, a resposta certa é **D**.

4. $|1 - \sqrt{3}|$ é equivalente à:

   A: $1 - \sqrt{3}$ B: $1 + \sqrt{3}$ C: $-1 + \sqrt{3}$ D: $-1 - \sqrt{3}$ E: $\sqrt{3}$

   Resolução: Visto que $\sqrt{3} > 1$ e o módulo de um número nunca é negativo, então $|1 - \sqrt{3}| = |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1 = -1 + \sqrt{3}$. Então, a resposta certa é **C**.

5. A soma das soluções da equação $|x - 5| = 3$ é:

   A: 2 B: 8 C: -2 D: -8 E: 10

   Solução: Resolvendo a equação dada temos: $|x - 5| = 3 \Leftrightarrow x - 5 = 3 \vee x - 5 = -3 \Leftrightarrow x = 8 \vee x = 2$. Assim a sua soma será $8 + 2 = 10$. Logo, a resposta certa é **E**.

6. A solução da inequação $|x-5|<3$ é:

   A: $2 \leq x \leq 8$ **B:** $2 < x < 8$ **C:** $2 < x \leq 8$ **D:** $2 \leq x < 8$ **E:** $x < 8$

   Resolução: Usando a ideia do exercício 3, temos $|x-5|<3 \Leftrightarrow x-5<3 \wedge x-5>-3 \Leftrightarrow x<8 \wedge x>2 \Leftrightarrow 2<x<8$. A resposta certa é **B**.

7. $|4-x|$ com $x>4$ é equiva;ente à:

   A: $4-x$ B: $4+x$ C: $x-4$ D: $2-\sqrt{x}$ E: $2+\sqrt{x}$

   Resolução: De um modo similar ao número 4 com $x>4$, $4-x \leq 0 \Rightarrow 4-x=-(x-4) \Rightarrow |4-x| = |-(x-4)| = |x-4| = x-4$, pois $x-4 \geq 0$. Portanto, a resposta certa é **C**.

8. Simplificando a expressão $\dfrac{|2-x|}{2-x}$ obtém-se:

   A: 1 B: -1 C: 1 para $x>2$ e -1 para $x<2$
   D: -1 para $x>2$ e 1 para $x<2$ E: Nenhuma das anteriores

   Solução: Essa expressão existe quando $2-x \neq 0$ i.e., $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Usando a definição de módulo de um número temos

   $$\frac{|2-x|}{2-x} = \begin{cases} \frac{2-x}{2-x}, & \text{se } 2-x>0 \\ \frac{-(2-x)}{2-x}, & \text{se } 2-x<0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } x<2 \\ -1, & \text{se } x>2 \end{cases}$$

   A resposta certa é **D**.

9. É **<u>falsa</u>** a afirmação:

   A: $A_3^5 = \dfrac{5!}{2!}$ B: $C_3^5 = \frac{5!}{2!+3!}$ C: $P_5 = 5!$ D: $C_3^5 = \frac{5!}{3!\cdot 2!}$ E: $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

   Resolução: Pela definição de aranjos temos $A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$ então $A_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!}$, é verdadeira. Pela definição de permutação temos $p_n = n! \Rightarrow P_5 = 5! = 4\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$, então as alternativas **C** e **E** são verdadeiras. Usando a definição de combinações temos $C_k^n = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ temos que a alternativa **D** é verdadeira, pois $C_3^5 = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!} = \frac{5!}{3!\cdot 2!}$ enquanto que a alternativa **B** não satisfaz a definição de combinações, logo esta é falsa. Assim, a resposta certa é **B**.

10. Simplificando $\dfrac{7!}{8!n+2\times 8!}$ obtém-se:

    A: $\frac{1}{8(n+2)}$ B: $\frac{7!}{8(n+2)}$ C: $\frac{7!}{8!+16!}$ D: $\frac{7!}{24!n}$ E: $\frac{1}{8!(n+2)}$

    Resolução: Usando a definição de factorial i.e., $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1$, temos

    $$\frac{7!}{8!n+2\times 8!} = \frac{7!}{8!(n+2)} = \frac{7!}{8\cdot 7!(n+2)} = \frac{1}{8(n+2)}.$$ Logo, a resposta certa é **A**.

11. Quantos números com 3 algarismos diferentes podem escrever-se com os algarismos $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ e 9?

    A: 3024 B: 504 C: 72 D: 1024 E: 514

Resolução: Para formar números de três algarismos diferentes usamos aranjos $A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$, assim temos $A_3^9 = \frac{9!}{(9-3)!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$, ou equivalentemente, para escolhero primeiro algarísmo temos 9 possibilidades, para o segundo 8 (visto que não há repetição de algarísmos) e para o terceiro temos 7 possibilidades. Deste modo ficamos com $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ números diferentes. Portanto, a alternativa certa é **B**.

12. A equipe de voleibol da escola XY dispõe de 8 jogadores que podem jogar em qualquer posição. O número de alternativas que o treinador tem para formar a sua equipe de 6 jogadores em campo é:

A. 28 B. 56 C. 24 D. 32 E. 10

Resolução: Para escolher uma equipa de 6 jogadores dos 8 usamos as combinaão, ssim $C_6^8 = \frac{8!}{6!(8-6)!} = \frac{8 \cdot 7}{2!} = 28$. Logo, a resposta certa é **A**.

13. O número de possibilidades que cinco pessoas têm de se sentar à uma mesa de cinco lugares é:

A. 52 B. 25 C. 120 D. 720 E. 50

Resolução : O número de possibilidades que as n pessoas têm de se sentar em n lugares é dado pela permutação que é $n!$. Logo, para cinco pessoas em uma mesa de 5 lugares temos $5! = \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ possibilidades. Então, a resposta certa é **C**.

14. O produto das soluções da equação $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!} = 0$ é igual a 2. As soluções são:

A: $n = -1 \vee n = -2$ B: $n = -1 \vee n = 2$ C: $n = 1 \vee n = -2$ D: $n = 1 \vee n = 2$ E: $n = 3 \vee n = 2$

Resolução : Resolvendo a equação dada temos:

$$\frac{(n-1)!}{(n-3)!} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = (n-1)(n-2) = 0 \Rightarrow n = 1 \vee n = 2.$$

Vemos que $1 \cdot 2 = 2$. Logo, a resposta certa é **C**.

Considere a experiência aleatória que consiste no lançamento de um dado equilibrado. Responda às Questões 15 a 18

15. O cardinal do espaço amostral Ω é:

A. 2 B. 5 C. 6 D. 7 E. 4

Resolução : Se um conjunto é finito, o seu cardinal é igual ao seu número de elementos. No lançamento de um dado equuilibrado temos $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Assim, $|\Omega| = 6$. Logo, a resposta certa é **C**.

16. "Sair 7" é um acontecimento:

A: Certo B: Impossível C: Contrário D: Provável E: Nenhuma das anteriores

Reolução : A probabilidade de sair 7 é dada por $\frac{1}{6} \neq 0$, então o evento "sair 7"é provável. É não certo pois a sua probabilidade é menor que 1. Então, a resposta certa é **D**.

17. Considerando os acontecimentos A: "Sair um número ímpar"e B: "Sair um múltiplo de 3"tem-se:

A: $A \cap B = \{3\}$ **B**: $B = \{1, 3, 6\}$ C: $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ D: $\overline{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução: Em Ω, temos os eventos $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{3, 6\}$. Então $A \cap B = \{3\}$ logo, a opção A é certa. Também vemos que $A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$, $\overline{B} = \Omega \setminus B = \{1, 2, 4, 5\}$ não coincidem com nenhuma das alternativas dadas. Logo, **A** é única altenativa certa.

18. A probabilidade de sair um número par no lançamento de um dado é:

A: $\dfrac{1}{6}$ B: $\dfrac{1}{3}$ C: $\dfrac{5}{6}$ D: $\dfrac{2}{3}$ E: $\frac{1}{2}$

Resolução: Seja C o evento sair um número par, então $C = \{2, 4, 6\} \Rightarrow |C| = 3$. Assim, $P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Logo, a resposta certa é **E**.

19. Um saco contém bolas do mesmo tamanho, mas com cores diferentes: três azuis, quatro vermelhas e uma amarela. Retira se ao acaso uma bola. A probabilidade da bola retirada ser azul é:

A: $\dfrac{3}{8}$ B: $\dfrac{1}{2}$ C: $\dfrac{1}{8}$ D: $\dfrac{2}{3}$ E: $\frac{1}{3}$

Resolução : A probabilidade de sair uma bola azul é dada pela divisão do número de bolas azuis pelo número total de bolas, i.e., $P(\text{sair bola azul}) = \frac{3}{3+4+1} = \frac{3}{8}$. Logo, a resposta certa é **A.**

20. O termo geral de sucessão $\dfrac{4}{3}, \dfrac{9}{5}, \dfrac{16}{7}, \dfrac{25}{9}, \dfrac{36}{11}, \ldots$ é:

A: $\dfrac{n^2}{2n-1}$ B: $\dfrac{n^2}{n+2}$ C: $\dfrac{(n+1)^2}{2n-1}$ D: $\dfrac{n^2}{2n+1}$ E: $\dfrac{(n+1)^2}{2n+1}$

Resolução: Tomando a sucessão dos numeradores temos $4, 9, 16, 25, 36, \ldots$ vemos que não uma progressão aritmética e nem geométrica, mas $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, $25 = 5^2$, $36 = 6^2$, $\ldots$ e a sucessão das bases 2, 3, 4, 5, 6, $\ldots$ que é uma PA com $d = 1$, então o termo geral é $a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1) \cdot 1 = n+1$, pois $a_1 = 2$. Neste caso, a sucessão do numerador tem com o termo geral $b_n = a_n^2 = (n+1)^2$.

Para o denominador temos a sequência 3, 5, 7, 9, 11, $\ldots$. Se u_n é o termo geral do denominador, vemos que u_n é uma PA com $d_1 = u_n - u_{n-1} = 2 \Rightarrow u_n = u_1 + (n-1)d_1 = 3 + (n-1) \cdot 2 = 2n+1$. Assim, o termo geral da sucessão dada é $c_n = \dfrac{b_n}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2}{2n+1}$. Logo, a opção correcta é **E.**

Considere a sucessão $b_n = \frac{2-n}{n+1}$ e responda às Questões 21 e 22:

21. $b_{n+1} - b_n$ é igual à:

A: $\dfrac{-3-2n^2}{(n+1)(n+2)}$ B: $\dfrac{5}{(n+1)(n+2)}$ C: $\frac{-3}{(n+1)(n+2)}$ D: $\frac{2n-1}{(n+1)(n+2)}$ E: $b_n = \frac{2n+7}{(n+1)(n+2)}$

Resolução : Temos:

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{2-(n+1)}{(n+1)+1} - \frac{2-n}{n+1} = \frac{1-n}{n+2} - \frac{2-n}{n+1} = \frac{(1-n)(n+1)-(2-n)(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1-n^2-(4-n^2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{-3-2n^2}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

A resposta certa é **A**.

22. O $\lim b_n$ é:
A: -1 B: 1 C: 0 D: 2 E: $+\infty$

Resolução : Aplicando substituição directa obtemos indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$. Factorizando, temos:

$$\lim b_n = \lim \frac{2-n}{n+1} = \lim \frac{n(\frac{2}{n}-1)}{n(1+\frac{1}{n})} = -1.$$

A resposta certa é **A**.

23. O sexto termo de uma progressão geométrica, cujo primeiro termo é 8, é igual a $\frac{1}{4}$. A razão da progressão é:
A: $\dfrac{1}{3}$ B: 2 C: $\frac{1}{2}$ D: 3 E: $\frac{1}{3}$

Resolução : O sexto termo de uma progressão geométrica é dado por:

$$a_6 = a_1 \cdot r^{(6-1)} = 8 \cdot r^5$$

Sabendo que $a_6 = \frac{1}{4}$, podemos escrever:

$$8 \cdot r^5 = \frac{1}{4},\ r^5 = \frac{1}{32},\ r = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = 1/2.$$

Portanto, a razão da progressão é $\frac{1}{2}$. A resposta certa é **C**.

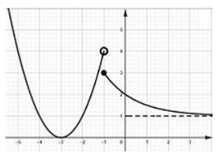
24. Numa progressão aritmética o décimo segundo termo é -16 e o quinto 12. O primeiro termo e a diferença são respectivamente:
A: $a_1 = -4,\ d = 4$ B: $a_1 = -4,\ d = 28$ C: $a_1 = -10,\ d = -4$
D: $a_1 = 28,\ d = -4$ E: $a_1 = -3,\ d = 24$

Resolução : A fórmula que relaciona dois termos duma progressão aritmética é $a_n = a_k + (n-k)d$, d é a diferença. Assim,

$$a_{12} = a_5 + (12-5)d \Rightarrow a_{12} - a_5 = 7d \Rightarrow d = \frac{a_{12}-a_5}{7} = \frac{-16-12}{7} = -4.$$

Desta forma, $a_1 = a_5 + (5-1)d = 12 + 4(-4) = -4$. A resposta certa é **A**.

Com base no gráfico da função $y = f(x)$ abaixo responda às Questões 25 e 26.



25. É <u>falsa</u> a afirmação :
A. $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 4$ B: $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 3$ C: $f(-1) = 3$
D: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 5$ E: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$

Resolução : Pelo gráfico temos $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$, pois, os valores de f tendem a crescer à mediida que x tende a $-\infty$. Esta é a única alternativa que nõ corresponde a verdade.

A resposta certa é **D**.

26. Sobre a função $y = f(x)$ pode-se afirmar que:

A. Tem um salto de segunda espécie em $x = -1$;
B. Os limites laterais em $x = -1$ não são reais;

C. Tem limite em $x=-1$;
D. $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$;
E. $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$.

Resolução :

(a) A alternativa A é Falsa, pois todos os limites laterais em cada ponto, existem e são finitos;

(b) A alternativa B é Falsa, pois todos os limites laterais em cada ponto existem e são finitos (números reais);

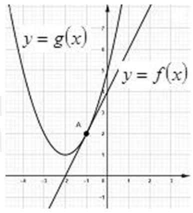
(c) As alternativas C e D são Falsas, pois os limites laterais em $x=-1$ são diferentes, logo, não existe o limite em $x=-1$;

(d) A alternativa D é Falsa, pois todos os limites laterais existem e são finitos;

(e) A alternativa E é Verdadeira.

A resposta certa é **E**.

Dados os gráficos das funções $y=f(x)$ e $y=g(x)$ representados na figura, responda da Questão 27 à 31.



27. $f(-1)$ é igual a:

A. -2 B. 2 C. 4 D. -1 E. 0

Resolução : Fazendo a leitura do gráfico, vemos que $f(-1)=2$. A resposta certa é **A**.

28. O coeficiente angular da recta é:

A. $a=2$ B. $a=-2$ C. $a=\frac{1}{2}$ D. $a=\frac{1}{2}$ E. $a=4$

Resolução : A recta passa pelos pontos $A(-1,2)$ e $(0,4)$. Assim, o coeficiente angular é $a=\dfrac{4-2}{0-(-1)}=2$. A resposta certa é **A**.

29. $g'(-1)$ é igual a:

A. $a=2$ B. $a=-2$ C. $a=\frac{1}{2}$ D. $a=\frac{1}{2}$ E. $a=4$

Resolução : A derivada da função $y=g(x)$ no ponto $x=-1$ é o coeficiente angular da recta, ou seja, $a=2$. A resposta certa é **A**.

30. O vértice da função $y=g(x)$ é:

A. $V(2;1)$ B. $V(2;-1)$ C. $V(-1;2)$ D. $V(-2;1)$ E. $V(1;2)$

Resolução : Fazendo a leitura do gráfico, vemos que o vértice é $V(-2,1)$.

A resposta certa é **D**.

31. A expressão analítica de $y=g(x)$ é:

A. $y=(x-1)^2+2$ B: $y=(x+2)^2+1$ C: $y=(x-2)^2+1$ D: $y=(x+2)^2-1$ E: $y=(x+1)^2-2$

Resolução : A expressão analítica de uma função quadrática tem a forma $y=a(x-x_v)^2+y_v$, onde (x_v,y_v) são as coordenadas do vértice. Assim, visto que o vértice de $g(x)$ é $v(-2,1)$, a expressão analítica de $y=g(x)$ terá a forma

$$y=g(x)=a(x+2)^2+1.$$

Visto que $g(x)$ passa pelo ponto $A(-1,2)$, teremos $2 = a(-1+2)^2+1$, de onde obtemos $a = 1$. Assim, $y = g(x) = (x+2)^2+1$ é a expressão analítica de $g(x)$. A resposta certa é **B**.

- Note que as expressões analíticas das funções nas restantes alternativas não passam pelo ponto A.

32. A derivada da função $y = (x^3-5x^2+4)^2$ é:
A. $y' = 2(x^3-5x^2+4)^2(3x^2-10x)$ B: $y' = 2(3x^2-10x)$ C: $y' = 2(x^3-5x^2+4)(3x^2-10x)$
D: $y' = 2(x^3-5x^2+4)^2(3x^2-10x+4)$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Temos:

$$y' = 2(x^3-5x^2+4)(x^3-5x^2+4)' = 2(x^3-5x^2+4)(3x^2-10x).$$

A resposta certa é **C**.

Considere a função $y = -x^3+27x$. Responda às Questões 33 a 38.

33. Os zeros da função são:

A. $x = 0 \vee x = \sqrt{27}$ B: $x = -\sqrt{27} \vee x = \sqrt{27}$ C: $x = 0 \vee x = -\sqrt{27}$
D: $x = 0 \vee x = -\sqrt{27} \vee x = \sqrt{27}$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Temos:

$$-x^3+27x = 0 \Leftrightarrow x(-x^2+27) = 0 \Leftrightarrow x(x+\sqrt{27})(-x+\sqrt{27}) = 0$$
$$\Rightarrow x = 0 \vee x+\sqrt{27} = 0 \vee -x+\sqrt{27} = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{27} \vee x = \sqrt{27}.$$

A resposta certa é **D**.

34. Os extremos da função são:
A. $x_{\max} = 3 \vee x_{\min} = -3$ B: $x_{\max} = \sqrt{27} \vee x_{\min} = -\sqrt{27}$ C: $x_{\max} = -\sqrt{27} \vee x_{\min} = \sqrt{27}$
D: $x_{\max} = -3 \vee x_{\min} = 3$ E: $x_{\max} = 0 \vee x_{\min} = 3$

Resolução : Temos

$$y' = -3x^2+27 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow -3x^2+27 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3.$$

Para verifcarmos se nestes pontos a função atinge extremos, teremos:

x	$]-\infty,-3[$	-3	$]-3,3[$	3	$]3,+\infty[$
y'	—	0	+	0	—
y	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\searrow$

Desta forma, quando $x = -3$, a função atinge um mínimo local e quando $x = 3$, a função atinge um máximo local, ou seja, $x_{\min} = -3$ e $x_{\max} = 3$. A resposta certa é **A**.

35. A função cresce nos intervalos:
A. $]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$ B: $]-\infty,-\sqrt{27}[\cup]\sqrt{27},+\infty[$ C: $[-3,3]$
D: $[-\sqrt{27},\sqrt{27}]$ E: $]-3,3[$

Resolução : Utilizando a tabela na resolução do exercício 35, vemos que a função cresce no intervalo $]-3,3[$. A resposta certa é **E**.

36. A derivada da função é negativa nos intervalos:
A. $]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$ B: $]-\infty,-\sqrt{27}[\cup]\sqrt{27},+\infty[$ C: $[-3,3]$
D: $[-\sqrt{27},\sqrt{27}]$ E: $]-3,3[$

Resolução : Utilizando a tabela na resolução do exercício 35, vemos que a derivada da função é negativa no intervalo $]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$. A resposta certa é **A**.

37. A função tem a concavidade voltada para cima nos intervalos:
A. $]-\infty,0]$ B: $]-\infty,0[$ C: $[0,+\infty[$ D: $]0,+\infty[$ E: $]-\infty,3[$

Resolução : Temos $y' = -3x^2 + 27 \Rightarrow y'' = -6x \Rightarrow -6x = 0 \Rightarrow x = 0.$

Verifiquemos o sinal da segunda derivada. Temos:

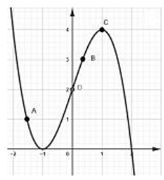
x	$]-\infty,0[$	0	$]0,+\infty[$
y'	$+$	0	—
y	$\cup$	0	$\cap$

A função tem concavidade virada para cima no intervalo $]-\infty,0[$. A resposta certa é **A**.

38. O ponto de inflexão é:
A. $(0,3)$ B: $(0,-3)$ C: $(0,0)$ D: $(-3,0)$ E: $(0,0)$

Resolução : Utilizando os dados da resolução do exercício 37, vemos que o ponto de inflexão é $(0,0)$.
A resposta certa é **E**.

Em relação ao gráfico responda às Questões 39 a 40.



39. É verdadeira a afirmação :
A. O coeficiente angular da recta tangente à curva no ponto A é positivo;
B. No ponto C a recta tangente à curva é paralela ao eixo das ordenadas;
C. O coeficiente angular da recta tangente à curva no ponto C é zero;
D. A segunda derivada no ponto D é positiva;
E. A recta tangente à curva no ponto B é decrescente.

Resolução :

- A alternativa A é falsa, pois, a função é decrescente na vizinhanção do ponto A, consequentemente, a derivada no ponto A é negativa;
- A alternativa B é falsa, pois, a tangente à função no ponto C é paralela ao eixo das abcissas;
- A alternativa C é verdadeira, pois, a recta tangente à função no ponto C é paralela ao eixo das ordenadas, ou seja, é uma recta constante $y = b$ e o coeficiente angular é zero;
- A alternativa D é falsa, pois, a função muda o tipo de concavidade no ponto D, logo, a segunda derivada da função em Dé igual a zero;
- A alternativa E é falsa, pois, a função é crescente na vizinhanção do ponto B, consequentemente, a derivada no ponto B é positiva;

A resposta certa é **C**.

40. É falsa a afirmação:

A. A função tem três raízes reais.
B. A ordenada na origem da função é $2 = y$.
C. No intervalo $]1, \infty[$ a primeira derivada da função é negativa.
D. A função admite um extremo máximo em $x = 1$.
E. D é um ponto de inflexão.

Resolução: Pelo gráfico, quando $x = 0$ temos $y = 2$ que é a ordenada na origem. No intervalo $]1, +\infty[$ a função é decrescente, logo a derivada da função é negativa neste intervalo. No ponto D a função muda de concavidade p que quer dizer que D é pontop de inflfexão. Voltando ao gráfico, vemos que a função possui dois zeros reais, $x = -1$ e $x = 2$, e não mais. Logo é falsa a afirmação da alternativa A. Então, a resposta certa é **A**.